الصف الثاني الثانوي – القسم العلمي
الوحدة الأولى – الدوال الحقيقية ورسم المنحنيات

الدرس الأول: .الدوال الحقيقية

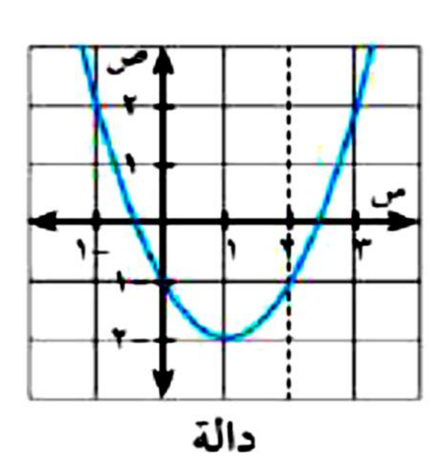
ملخص الدرس:

– مفهوم الدالة الحقيقية

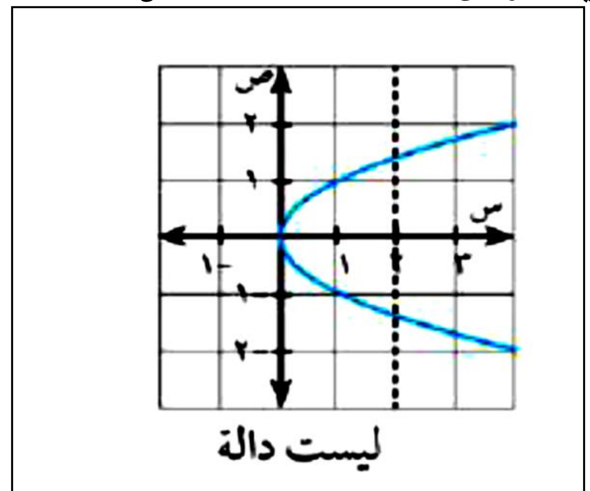
هي دالة كل من مجالها ومجالها المقابل ح (مجموعة الاعداد الحقيقية) أو مجموعة جزئية منها

– اختبار الخط الرأسي للتعرف على الدالة

إذا كان الخط الرأسي عند كل عنصر من عناصر المجال يقطع منحى العلاقة الممثلة بيانيا في نقطة واحدة فقط كانت هذه العلاقة تمثل دالة و إذا وجد خط رأسي يقطع منحنى العلاقة في أكثر من نقطة فإن العلاقة لا تمثل دالة



دالة



ليست دالة

- تحديد مجال ومدي الدالة

أولا : بيانيا

إذا كان الشكل المقابل يمثل الشكل البياني للدالة ص= د(س) فإن

مدى الدالة =[جـ ، ء] ، مجال الدالة = [٩ ، ب]

في الشكل البياني الممثل للدالة د
مجال الدالة = [أ ، ب]
مدى الدالة = [جـ ، ى]

ثانيا :جبريا

يتحدد مجال الدالة جبريا حسب نوع الدالة

١- أي دالة كثيرة الحدود مجالها ح (مجموعة الاعداد الحقيقية) ما لم تكن معرفة على مجموعة جزئية منها .

أمثله دوال كثيرات الحدود

د(س) = ٧ الدالة الثابتة ، مجالها ح

د(س) = ٢س+ ٣ دالة كثيرة حدود من الدرجة الاولى (دالة خطية) ، مجالها ح

د(س) = س^{٢}+ س-٣ دالة كثيرة حدود من الدرجة الثانية (دالة تربيعية) ، مجالها ح

د(س) = س^{٣}+ ١ دالة كثيرة حدود من الدرجة الثالثة (دالة تكعيبية) ، مجالها ح

٢- إذا كانت ق(س) = $\sqrt[ن]{د(س)}$ حيث د كثيرة حدود فإن

اولا: مجال ق هو ح عندما تكون ن عدد فردي > ١

ثانيا: مجال ق = { س : س ∈ ح ، د (س) ≥ ٠ } عندما ن عدد زوجي > ١

٣- إذا كانت ق(س) = $\frac{د(س)}{هـ(س)}$ حيث كل من د ، هـ دوال كثيرات حدود

فإن مجال ق هو ح - مجموعة أصفار المقام

-العمليات على الدوال

إذا كانت $د_1$ ، $د_2$ دالتين مجالاهما $م_1$، $م_2$ على الترتيب ، فإن:

١ - $(د_1 \pm د_2)(س) = د_1(س) \pm د_2(س)$ ، مجال $(د_1 \pm د_2)$ هو $م_1 \cap م_2$

٢ - $(د_1 . د_2)(س) = د_1(س) . د_2(س)$ ، مجال $(د_1 . د_2)$ هو $م_1 \cap م_2$

٣ - $\left(\frac{د_1}{د_2}\right)(س) = \frac{د_1(س)}{د_2(س)}$ حيث $د_2(س) \neq ٠$ مجال $\left(\frac{د_1}{د_2}\right)$ هو $(م_1 \cap م_2) - ف(د_2)$

حيث $ف(د_2)$ مجموعة أصفار $د_2$

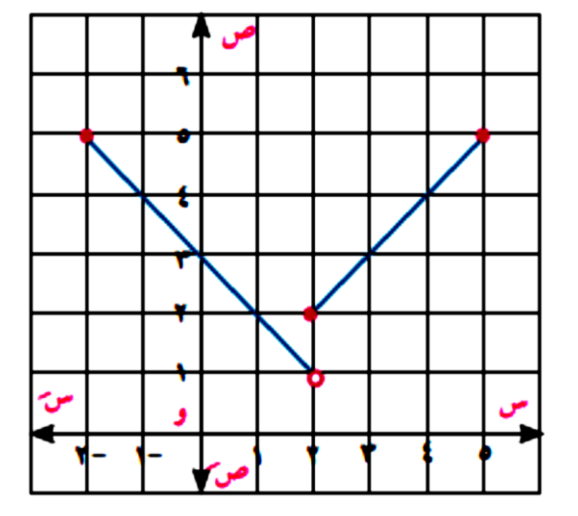
تركيب الدوال

لأي دالتين ر ، د إذا كان مجال ر $\cap$ مدى د $\neq \varnothing$ فإنه يتعين دالة جديدة ق تتركب من الدالتين السابقتين وهي : ق = ر ه د وتقرأ ر تركيب د أو ر بعد د وتعرف كما يلي:

ق (س) =(ر ه د) (س) = ر(د(س))

أمثلة محلول

مثال محلول (١): الشكل المقابل يمثل العلاقة البيانية بين س ، ص فهل ص دالة في س ، وإذا كانت هذه العلاقة دالة فعين المجال والمدي



الحـــــــــــــــــــــــــل

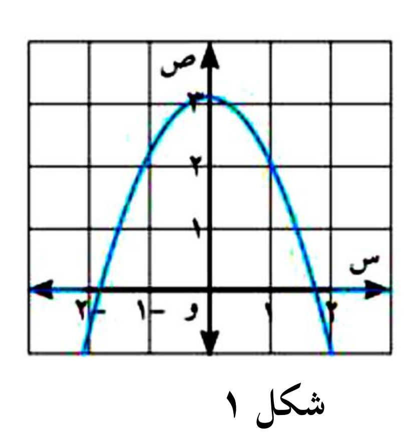
العلاقة البيانية تمثل دالة من س إلى ص لأن كل خط رأسي مرسوم يقطع المنحنى في نقطة واحدة.

مجال الدالة = [ــ ٢ ، ٥]

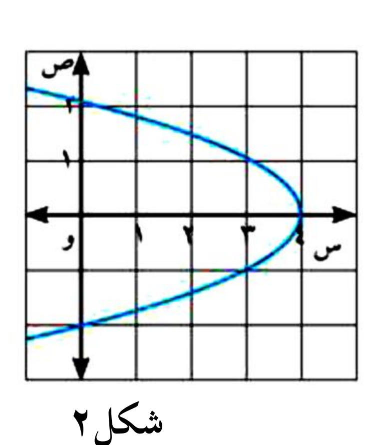
مدى الدالة =] ١ ، ٥]



تدريب (١):



شكل ١



شكل٢

في الاشكال السابقة بين ما إذا كانت ص تمثل دالة في س أم لا ؟

مثال محلول (٢):

حدد مجال كل من الدوال التالية:

$$د(س) = \frac{س + ١}{س^٢ - ١} \qquad ر(س) = \frac{س + ١}{س^٢ + ١}$$

الحـــــــــــــــــــــــــل

مجال د = ح − مجموعة اصفار المقام	مجال ر = ح − مجموعة اصفار المقام
$س^٢ - ١ = ٠ \leftarrow س = \pm ١$	، حيث أن $س^٢ + ١ \neq ٠$ لجميع قيم س الحقيقية
مجال د = ح − {١ ، −١}	∴ مجال ر = ح

تدريب (٢):

حدد مجال كل من الدوال التالية:

$$د(س) = \frac{س + ٣}{س^٢ - س} \qquad ر(س) = \frac{٢س}{س^٢ + س - ٦}$$



مثال محلول (٣):

إذا كان د(س) = ٢س +١، هـ (س) = $\sqrt{س+٤}$ فإن (د ○ هـ) (٠) =............

(أ) ١ (ب) ٢ (ج) ٥ (ء) $\sqrt{٥}$

الحـــــــــــــــــــــــل

(د ○ هـ) (٠) = د (هـ (٠)) = د ($\sqrt{٠+٤}$) = د (٢) = ٥ ∴ الاجابة الصحيحة هي (ج)

تدريب (٣):

إذا كان د(س) = ٢س +١، هـ (س) = $\sqrt{س+٤}$ فإن (هـ ○ د) (٠) =............

(أ) ١ (ب) ٢ (ج) ٥ (ء) $\sqrt{٥}$

حلول التدريبات:

حل تدريب (١): شكل (١) دالة – شكل (٢) ليست دالة

حل تدريب (٢): مجال د = ح - { ٠ ، ١ } ، مجال ر = ح - { ٢ ، -٣ }

حل تدريب (٣): (ء) $\sqrt{٥}$

تمارين على الدرس الأول

اختر الاجابة الصحيحة

١) مجال الدالة د : د(س) = $\sqrt{٢ - س}$ هو.................

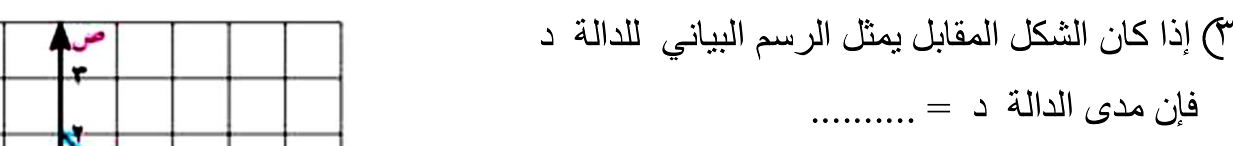
(أ) ح − { ١ }　　(ب)] ٠ ، ∞ [　　(ج)] ٢ ، ∞ [　　(د)] - ∞ ، ٢]

٢) إذا كان الجدول المقابل يمثل بيان كل من الدالتين د ، ر

فإن (ر ο د) (١) = ...

س	١	٢	٣	٤
د(س)	٣	١	٤	٢
ر(س)	٤	٣	٢	١

(أ) ١　　(ب) ٢　　(ج) ٣　　(د) ٤



٣) إذا كان الشكل المقابل يمثل الرسم البياني للدالة د

فإن مدى الدالة د = ...

(أ) ح　　(ب)] ٠ ، ∞ [

(ج)] ٠ ، ٢ [　　(د) [٠ ، ٢]

٤) إذا كان د(س) = س^{٢} + ٣ ، هـ(س) = ٢ س ـ ١ فإن (د + هـ)(١) =.........

(أ) ٢　　(ب) ٤

(ج) ٥　　(د) ٦



٥) إذا كان د(س) = س^{٢} + ٣ ، هـ(س) = ٢ س ـ ١ فإن (د × هـ)(١) =.........

(أ) ٢ (ب) ٤

(ج) ٥ (ء) ٦

٦) مجال الدالة د (س) = $\frac{٥}{\sqrt{س - ٤}}$ هو ....

(أ) [٤ ، ∞ [(ب)] ٤ ، ∞ [

(ج)] - ∞ ، ٤] (ء)] - ∞ ، ٤ [

٧) إذا كان د(س) = $\sqrt{س}$ ، هـ(س) = | س | فإن (د ∘ هـ)(-٤) =.........

(أ) ٢ (ب) -٢

(ج) ٢ أو -٢ (ء) غير معرف

٨) إذا كان د(س) = $\sqrt{س}$ ، هـ(س) = | س | فإن (هـ ∘ د)(-٤) =.........

(أ) ٢ (ب) -٢

(ج) ٢ أو -٢ (ء) غير معرف

٩) إذا كان د(س) = $\sqrt{س}$ ، هـ(س) = | س | فإن مجال (د ∘ هـ) =.........

(أ) ح (ب)] ٠ ، ∞ [

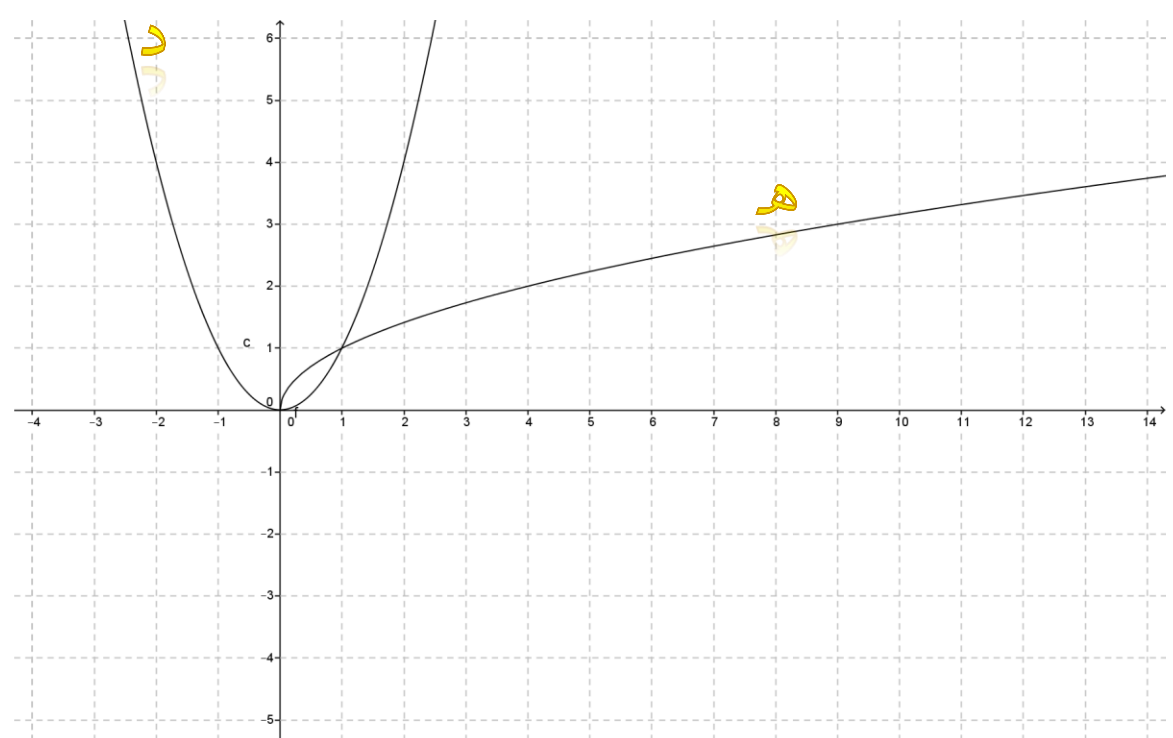
(ج) [٠ ، ∞ [(ء) ∅

١٠) إذا كان د(س) = $\sqrt{س}$ ، هـ(س) = | س | فإن مجال (هـ ∘ د) =.........

(أ) ح (ب)] ٠ ، ∞ [

(ج) [٠ ، ∞ [(ء) ∅





الشكل السابق يمثل الشكل البياني للدالتين د ، هـ
استعن بالشكل في الاجابة عما يلي :

١١)

(هـ o د) (-٢) =...............

Ⓐ غير معرف   Ⓑ ٢   Ⓒ ٤   Ⓓ -٤

١٢)

(د o هـ) (-٢) ....

Ⓐ غير معرف   Ⓑ ٢   Ⓒ ٤   Ⓓ -٤



حلول تمارين على الدرس الأول:

١) ء   ٢) ب   ٣) ء   ٤) جـ   ٥) ب

٦) ب   ٧) م   ٨) ء   ٩) م   ١٠) ب

١١) ب   ١٢) م



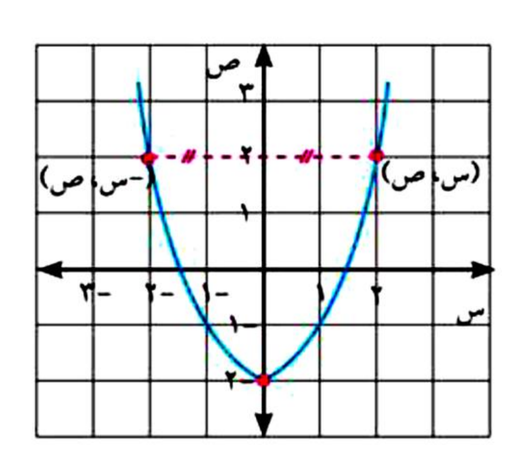
الصف الثاني الثانوي – القسم العلمي
الوحدة الأولى – الدوال الحقيقية ورسم المنحنيات

الدرس الثاني: بعض خواص الدوال

ملخص الدرس:

– مفهوم الدالة الزوجية

الدالة ص = د (س) تكون زوجية إذا تحقق الشرط د(– س) = د (س) لكل س ، – س ∋ مجال الدالة



وإذا كانت الدالة ممثلة بيانيا فانها تكون زوجية إذا كانت متماثلة حول محور الصادات ونلاحظ أنه

إذا كانت (س ، ص) ∋ د و كانت د دالة زوجية

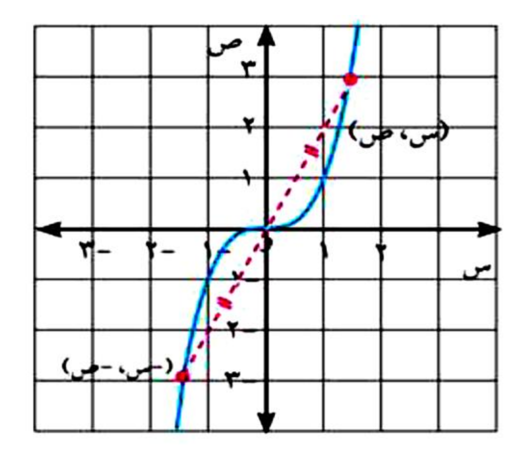
فإن (– س ، ص) ∋ د

ومن امثلة الدوال الزوجية د(س) = س ^{ن} : ن عدد زوجي

، هـ(س) = جتاس ، د(س) = – ٣

– مفهوم الدالة الفردية

الدالة ص = د (س) تكون فردية إذا تحقق الشرط د (ــ س) = ــ د(س) لكل س ، ــ س ∋ مجال الدالة وذلك إذا علمت قاعدة الدالة



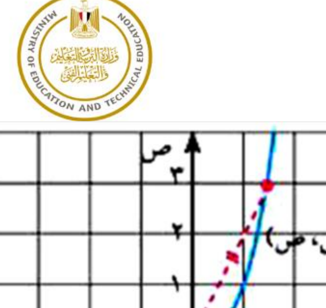
وإذا كانت الدالة ممثلة بيانيا فانها تكون فردية إذا كانت متماثلة حول نقطة الاصل ونلاحظ أنه

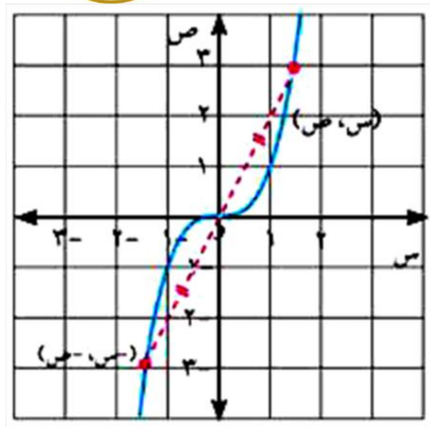
إذا كانت (س ، ص) ∋ د و كانت د دالة فردية

فإن (– س ، – ص) ∋ د

ومن امثلة الدوال االفردية د(س) = س ^{ن} : ن عدد فردي

، هـ(س) = جاس ، ر(س) = ظا س





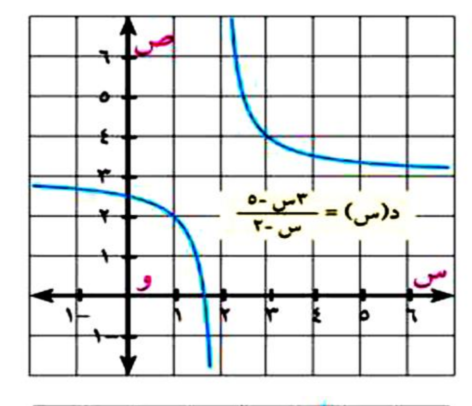
- **مفهوم الدالة الاحادية**

الدالة ص = د (س) تكون احادية إذا تحقق الشرط

د(أ) = د (ب) ← أ = ب لكل أ ، ب ∈ مجال الدالة

وإذا كان الشكل البياني للدالة معلوم فإنه يمكن الحكم على كون الدالة احادية أم لا من خلال اختبار الخط الافقي

فإذا كان الخط الافقي عند كل عنصر من عناصر مدى الدالة يقطع منحنى الدالة في نقطة واحدة فقط كانت الدلة احادية ،وإذا قطع منحنى الدالة في أكثر من نقطة كانت الدالة ليست احادية

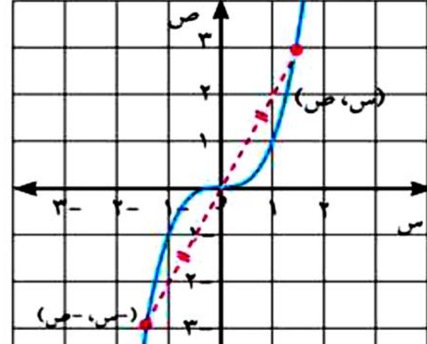


ونلاحظ أنه إذا كانت د دالة زوجية فهي بالضرورة دالة ليست احادية

لان د(− س) = د(س) ولكن س ≠ − س

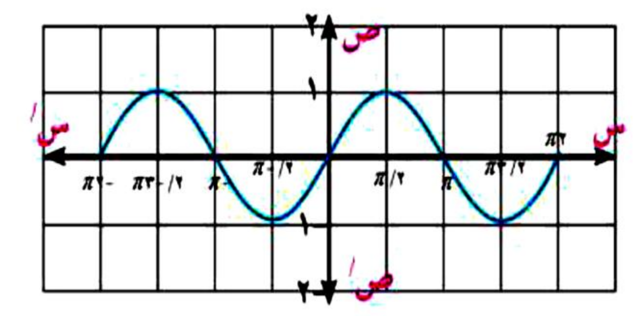
بينما إذا كانت د دالة فردية فقد تكون احادية

مثل الدالة د(س) = س^{3} دالة فردية واحادية



لاحظ : الدالة متماثلة حول نقطة الاصل فهى دالة فردية وكل خط افقي يقطع منحنى الدالة في نقطة واحدة فهى دالة احادية

،وقد تكون الدالة فردية ولكنها ليست احادية مثل الدالة د(س) = جا س



نلاحظ أن الدالة متماثلة حول نقطة الأصل

فهي دالة فردية

ولكن د(٠) = د(π) بينما ٠ ≠ π

وبالتالي د ليست أحادية



أمثلة محلول

مثال محلول (١): ابحث نوع كل دالة فيما يلي من حيث كونها زوجية أم فردية أم غير ذلك

(أ) د(س) = س^{٢} + ٧ (ب) ر (س) = س^{٣} - س

الحـــــل

(أ) د(-س) = (-س)^{٢} + ٧
= س^{٢} + ٧
= د(س)
∴ د دالة زوجية

(ب) ر (-س) = (-س)^{٣} − (-س)
= − س^{٣} + س
= − (س^{٣} − س)
= − ر (س)
∴ ر دالة فردية

تدريب (١):

ابحث نوع كل دالة فيما يلي من حيث كونها زوجية أم فردية أم غير ذلك

(أ) د(س) = س^{٤} − س^{٢} + ١ (ب) ر (س) = س^{٥} + س

مثال محلول (٢):

ابحث نوع كل دالة فيما يلي من حيث كونها احادية أم لا

(أ) د(س) = ٣س + ٢
(ب) ر (س) = ظاس

الحـــــــــــل

(أ) نفرض أن د(م) = د(ب) ← ٣ م + ٢ = ٣ ب + ٢ ← ٣ م = ٣ ب ← م = ب
∴ د دالة أحادية

(ب) حيث أن ر (٠) = ظا ٠ = ٠ ، ر(π) = ظا π = ٠

أي أن ر (٠) = ر (π) لكن ٠ $\neq \pi$ ∴ ر دالة ليست احادية

تدريب (٢):

ابحث نوع كل دالة فيما يلي من حيث كونها احادية أم لا

(أ) د(س) = ٢س - ٣

(ب) ر (س) = جتاس

حلول التدريبات

حل تدريب (١): (أ) د دالة زوجية (ب) ر دالة فردية

حل تدريب (٢): (أ) د دالة احادية (ب) ر دالة ليست احادية

تمارين على الدرس الثاني

اختر الاجابة الصحيحة

١) جميع الدوال التالية زوجية عدا

(أ) د(س) = $(س - ١)^{٢}$ (ب) د(س) = جتا س

(ج) د(س) = ٧ (د) د(س) = س جاس

٢) الدالة الاحادية فيما يلي هي

(أ) د(س) = $(س - ١)^{٢}$ (ب) د(س) = ٣

(ج) د(س) = $س^{٣}$ (د) د(س) = جاس

٣) الدالة الفردية فيما يلي هي

(أ) د(س) = ١ + س (ب) د(س) = قاس + جتا س

(ج) د(س) = س جتا س (د) د(س) = $س^{٤}$ - ٣

٤) إذا كان د(س) = م $س^٣$ + ب س + جـ دالة فردية فإن جـ = ...

(م) صفر (ب) ١

(جـ) ٢ (ء) ٣

٥) إذا كان د(س) = م $س^٣$ + ب دالة فردية وكان منحنى الدالة يمر بالنقطة (٢ ، ٨)

فإن م + $ب^٢$ = ...

(م) ١ (ب) صفر

(جـ) ٥ (ء) ـ ١

٦) إذا كان د(س) = $(س - ١)^٢$ فإن ......

(م) د دالة فردية و ليست احادية

(ب) د دالة زوجية و ليست احادية

(جـ) د ليست دالة زوجية و ليست احادية

(ء) د دالة زوجية و احادية

٧) إذا كان د(س) = | س | فإن ......

Ⓐ د دالة فردية و ليست احادية

ⓑ د دالة زوجية و ليست احادية

ⓙ د ليست دالة زوجية و ليست احادية

ⓓ د دالة زوجية و احادية

٨) إذا كان $ص_١$ = د (س) دالة زوجية فإن $ص_٢$ = س د (س) ، د(س) ≠ ٠ لكل س ∋ ح

فإن $ص_٢$ دالة ......

Ⓐ فردية

ⓑ زوجية

ⓙ ليست فردية وليست زوجية

ⓓ فردية و زوجية

٩) إذا كان د(س) = $\begin{cases} \frac{س - ٣}{٣ - س} & : س \neq ٣ \\ -١ & : س = ٣ \end{cases}$ فإن د دالة ......

Ⓐ فردية

ⓑ زوجية

ⓙ احادية

ⓓ زوجية واحادية



١٠) إذا كان د دالة زوجية ،هـ دالة فردية وكان د(٢)=٥ ، هـ (-٢) = ٣ فإن د (-٢) +هـ (٢) =...

Ⓐ ٨

ⓑ -٨

ⓒ ٢

ⓓ -٢

١١) إذا كانت د دالة زوجية فإن الدالة ق:

ق(س) = ٣ [د(س)]^{٢} + د(س) — ١ تكون دالة ....

(أ) زوجية　　(ب) فردية

(ج) ليست زوجية ولا فردية　　(ء) زوجية وفردية

حلول تمارين على الدرس الثاني:

١) أ　٢) ج　٣) ج　٤) أ　٥) أ

٦) ج　٧) ب　٨) أ　٩) ب　١٠) ج　١١) أ

الصف الثاني الثانوي – القسم العلمي
الوحدة الأولى – الدوال الحقيقية ورسم المنحنيات

الدرس الثالث : اطراد الدوال

ملخص الدرس:

- ماذا نعنى باطراد الدوال ؟

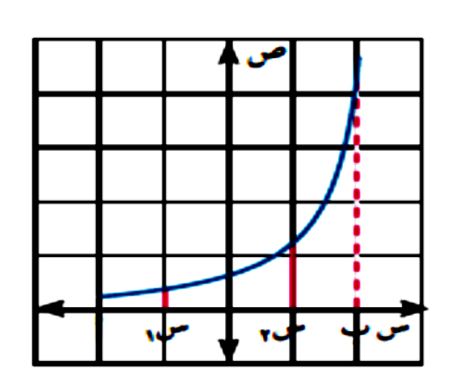
يقصد باطراد الدوال معرفة الفترات التي تكون فيها الدالة تزايدية أو تناقصية أو ثابتة.

تزايد الدالة:

يقال للدالة د أنها تزايدية فى الفترة]أ ، ب[

إذا كان لكل $س_1$ ، $س_2$ ∈]أ ، ب[حيث: $س_2 > س_1$

فإن: $د(س_2) > د(س_1)$

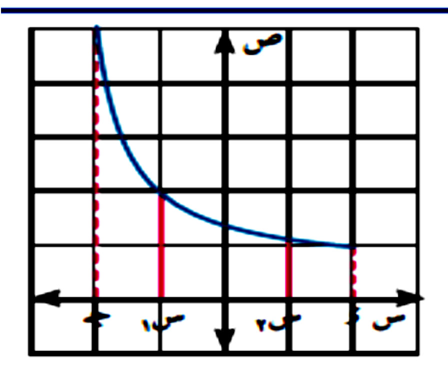


تناقص الدالة:

يقال للدالة د أنها تناقصية فى الفترة]جـ ، ى[

إذا كان لكل $س_1$ ، $س_2$ ∈]جـ ، ى[حيث: $س_2 > س_1$

فإن: $د(س_2) < د(س_1)$

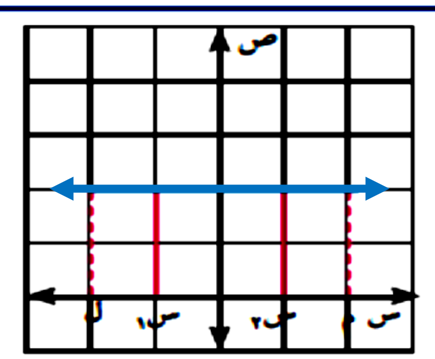


ثبوت الدالة:

يقال للدالة د أنها ثابتة فى الفترة]ل ، م[

إذا كان لكل $س_1$، $س_2$ ∈]ل ، م[حيث: $س_2 > س_1$

فإن: $د(س_2) = د(س_1)$



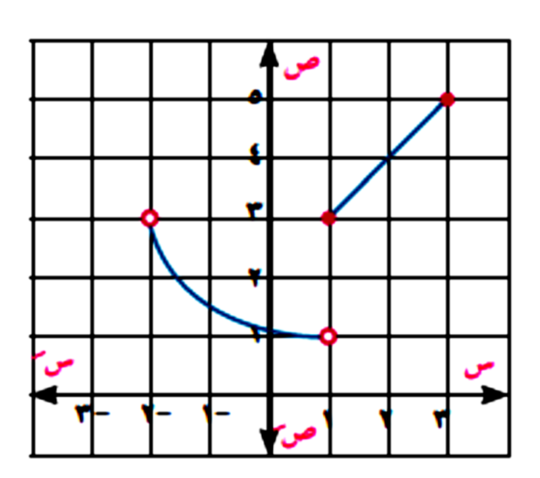


أمثلة محلول

مثال محلول (١):

الشكل المقابل يوضح التمثيل البياني لدالة د ، استعن بالرسم في الاجابة عن الاسئلة التالية:

- **عين مجال ومدى الدالة**
- **ابحث اطراد الدالة**

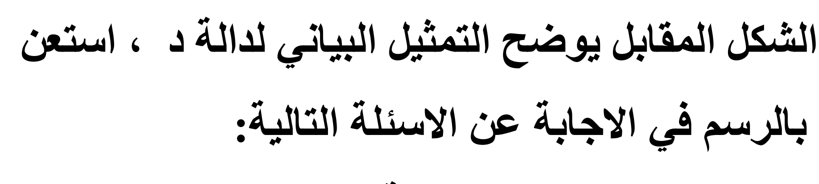


الحـــــــــــل

- المجال =] ـ ٢ ، ٣ [، المدى =] ١ ، ٥ [
- الاطراد

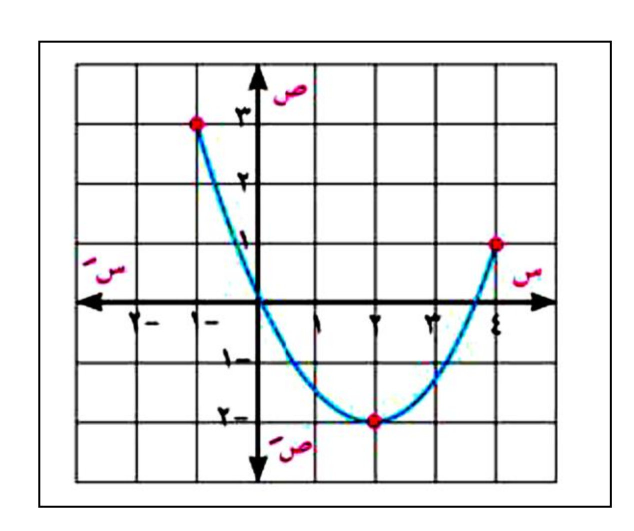
الدالة تناقصية في] ـ ٢ ، ١ [، الدالة تزايدية في] ١ ، ٣ [

تدريب (١):



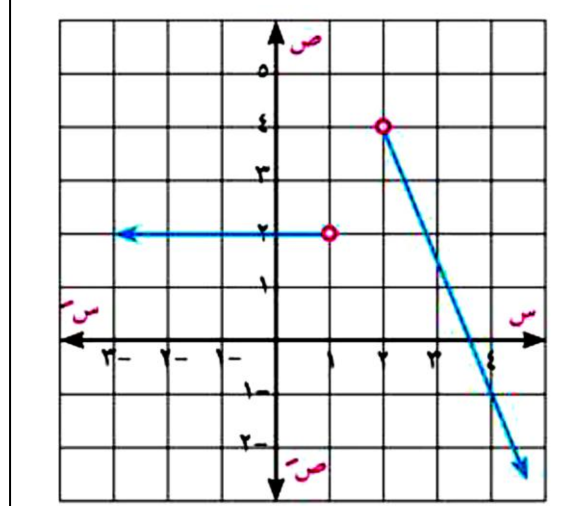
الشكل المقابل يوضح التمثيل البياني لدالة د ، استعن بالرسم في الاجابة عن الاسئلة التالية:

- **عين مجال ومدى الدالة**
- **ابحث اطراد الدالة**





مثال محلول (٢):



الشكل المقابل يوضح التمثيل البياني لدالة د ، استعن بالرسم في الاجابة عن الاسئلة التالية:

- **عين مجال ومدى الدالة**
- **ابحث اطراد الدالة**

الحـــــــــــل

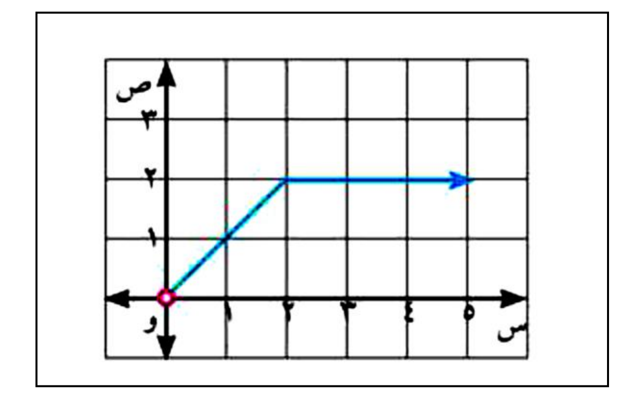
- المجال =] – ∞ ، ١ [∪] ٢ ، ∞ [= ح – [١، ٢]

المدى =] – ∞ ، ٤ [

- الاطراد

الدالة ثابتة في] – ∞ ، ١ [، الدالة تناقصية في] ٢ ، ∞ [

تدريب (٢):



الشكل المقابل يوضح التمثيل البياني لدالة د ، استعن بالرسم في الاجابة عن الاسئلة التالية:

- **عين مجال ومدى الدالة**
- **ابحث اطراد الدالة**



حلول التدريبات

حل تدريب (١):

المجال = [ــ ١ ، ٤] ، المدى = [ــ ٢ ، ٣]

الاطراد:

الدالة تناقصية في] ــ ١ ، ٢ [، الدالة تزايدية في] ٢ ، ٤[

حل تدريب (٢):

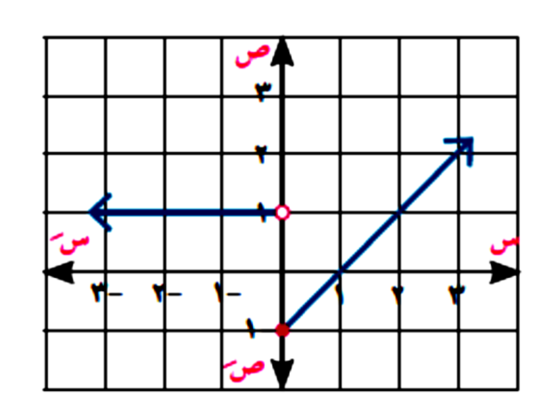
المجال =] ٠ ، ∞ [، المدى =] ٠ ، ٢]

الاطراد:

الدالة تزايدية في] ٠ ، ٢[، الدالة ثابتة في] ٢ ، ∞ [

تمارين على الدرس الثالث:

اختر الإجابة الصحيحة :



١) إذا كان الشكل المقابل يمثل الرسم البياني للدالة د فإن الدالة د تكون ثابتة في ....

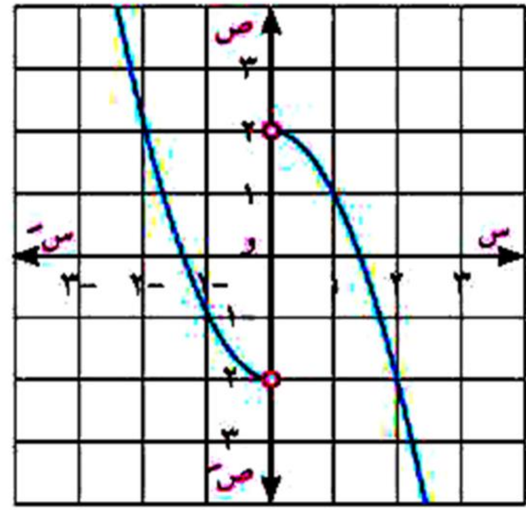
(أ)] -٣ ، ٠ [(ب)] - ∞ ، ٠ [

(ج)] - ∞ ، ١ [(ء)] ١ ، ∞ [

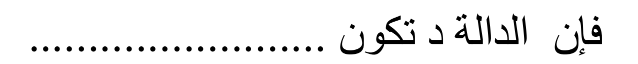
٢) في الشكل السابق د تكون تزايديةفي...............

(أ)] ١ ، ٢ [(ب)] - ∞ ، ٠ [

(ج)] ٠ ، ∞ [(ء)] ١ ، ∞ [




٣) إذا كان الشكل المقابل يمثل الشكل البياني لدالة د


فإن الدالة د تكون ....

أ) تزايدية في] - ∞ ، ٠ [

ب) تزايدية في] - ٢ ، ٢ [

ج) تناقصية في] - ∞ ، ∞ [

د) تناقصية في] ٠ ، ∞ [

٤) إذا كان الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د

فإن احدى فترات التزايد للدالة د هي ....

أ)]١ ، ∞ [

ب)]٠ ، ∞ [

ج)]– ∞ ، ٠ [

د)]٠ ، ١ [

٥) الدالة د : د(س) = -٤ تكون

أ) تزايدية دائما   ب) تناقصية دائما

ج) ثابتة دائما   د) تناقصية ثم متزايدة

٦) الدالة د : د(س) = جاس تكون دالة....

أ) تزايدية   ب) تناقصية

ج) ثابتة   د) فردية



٧) الدالة د : د(س) = ـ س تكون.......

ﺃ) تزايديةدائما　　　ب) تناقصية دائما

جـ) ثابتة دائما　　　ء) زوجية

٨) إذا كانت د دالة تناقصية في]ـ ٢ ، ٢ [فإن ....

ﺃ) د(٠)= ٠　　　ب) د(٠) < د(ـ ١)

جـ) د(٠) > د(ـ ١)　　　ء) د(١) = د(ـ ١)

٩) إذا كانت د دالة تزايدية على مجالها فإن قاعدة الدالة يمكن أن تكون د(س)=.....

ﺃ) ـ س^{٢}　　　ب) س^{٢}

جـ) $\sqrt{س}$　　　ء) ـ $\sqrt{س}$

١٠) الدالة د : د(س) = قا^{٢} س ـ ظا^{٢} س حيث س ∋ [٠ ، ٩٠° [تكون دالة ......

ﺃ) **تزايدية**　　　ب) **تناقصية**

جـ) **ثابتة**　　　ء) **احادية**

حلول تمارين على الدرس الثالث:

١) ب	٢) جـ	٣) ء	٤) ﺃ	٥) جـ
٦) ء	٧) ب	٨) جـ	٩) جـ	١٠) جـ



الصف الثاني الثانوي – القسم العلمي
الوحدة الأولى – الدوال الحقيقية ورسم المنحنيات

الدرس الرابع: التمثيل البياني للدوال والتحويلات الهندسية

ملخص الدرس:

– **دوال كثيرات الحددود :**

الصورة العامة لدالة كثيرة الحدود هي :

د(س) = $أ_ن$ س^ن + $أ_{ن-1}$ س$^{ن-1}$ + ... $أ_1$ س + $أ_0$.

حيث $أ_ن$ ، $أ_{ن-1}$ ، .. ، $أ_1$ ، $أ_0$ ∈ ح ، $أ_ن$ ≠ ٠ ، ن ∈ ط .تسمى الدالة السابقة دالة كثيرة حدود من درجة ن

ومن امثلتها

$د_1$(س) = ٣س^٢ – ٧س + ١ دالة كثيرة حدود من الدرجة الثانية

$د_2$(س) = ٨س – ٣ دالة كثيرة حدود من الدرجة الاولى

$د_3$(س) = ٤ دالة كثيرة حدود ثابتة

التمثيل البياني لبعض دوال كثيرات الحدود

(١) الدالة الثابتة د(س) = أ : أ ∈ ح

مثال : د(س) = ٢ دالة ثابتة

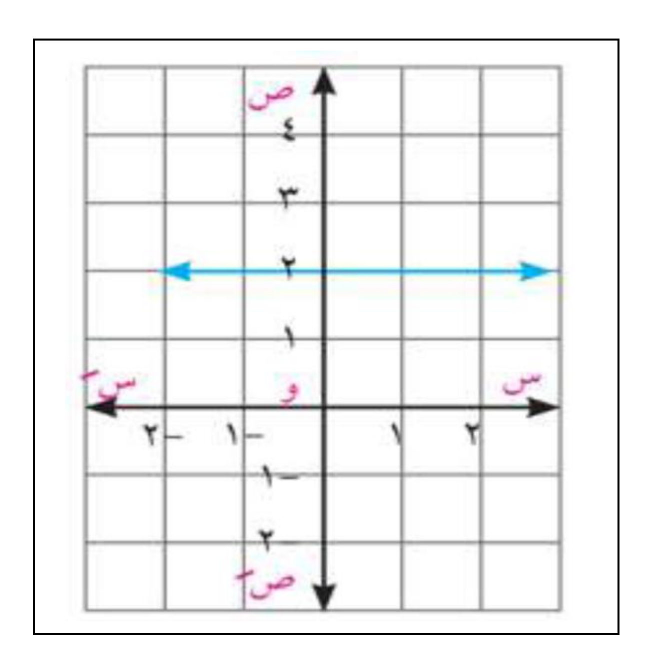
المجال = ح

المدى = {٢}

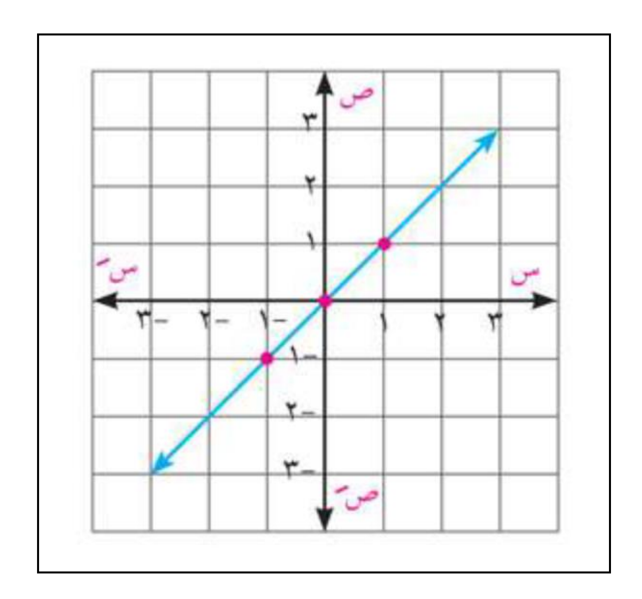
د دالة زوجية

د ليست أحادية

الدالة ليست تزايدية و لا تناقصية ولكنها ثابتة على مجالها



(٢) الدالة الخطية د(س) = ٢ س + ب : ٢ ، ب ∈ ح ، ٢ ≠ ٠



مثال : د(س) = س

المجال = ح

المدى = ح

د دالة فردية

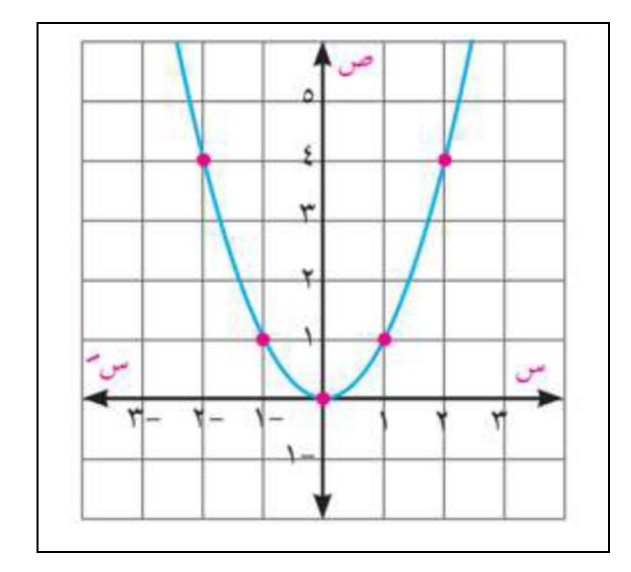
د دالة أحادية

د تزايدية على مجالها

لاحظ أن التمثيل البياني لهذه الدالة هو خط مستقيم يمر بنقطة الاصل وميله = ١

---

(٣) الدالة التربيعية د (س)= ٢ س^{٢} +ب س + ج : ٢ ،ب ،ج ∈ ح ، ٢ ≠ ٠



مثال : د(س) = س^{٢}

المجال = ح

المدى = [٠ ، ∞[

د دالة زوجية

منحنى الدالة متماثل حول محور الصادات

نقطة رأس المنحنى هى النقطة (٠ ، ٠)

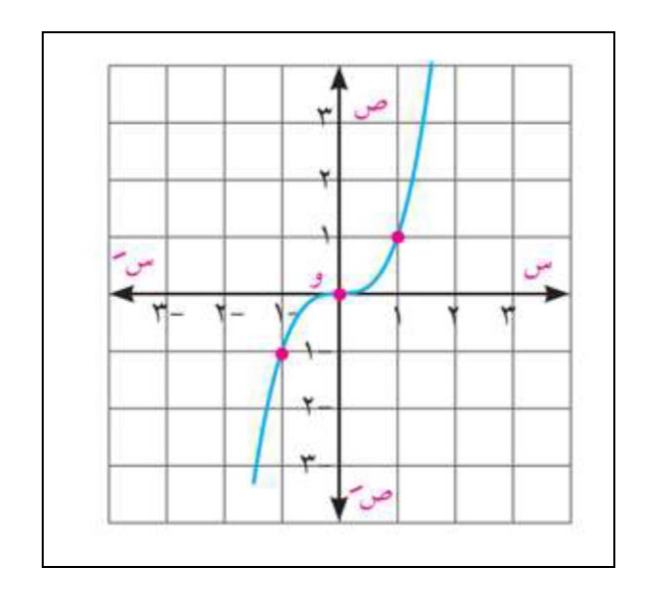
د دالة ليست أحادية

الدالة تناقصية في] - ∞ ، ٠ [

الدالة تزايدية في] ٠ ، ∞ [

---

(٤) الدالة التكعيبية د (س) = ٢ س^{٣} + ب س^{٢} + جـ س + ء : ٢ ، ب ، جـ ، ء ∈ ح ، ٢ ≠ ٠



مثال : د(س) = س^{٣}

المجال = ح

المدى = ح

د دالة فردية

(منحنى الدالة متماثلة حول نقطة الاصل)

د دالة أحادية

، الدالة تزايدية على مجالها

– التمثيل البياني لبعض دوال ليست كثيرات الحدود

١ـ دالة المقياس (دالة القيمة المطلقة)

أبسط صورة لدالة المقياس هي :

د(س) = |س| = { س : س ≥ ٠ ؛ ـ س : س < ٠ }

ونلاحظ أن : المجال = ح ، المدى = [٠ ، ∞[

د دالة زوجية حيث أن الشكل البيانى للدالة متماثل حول محور الصادات

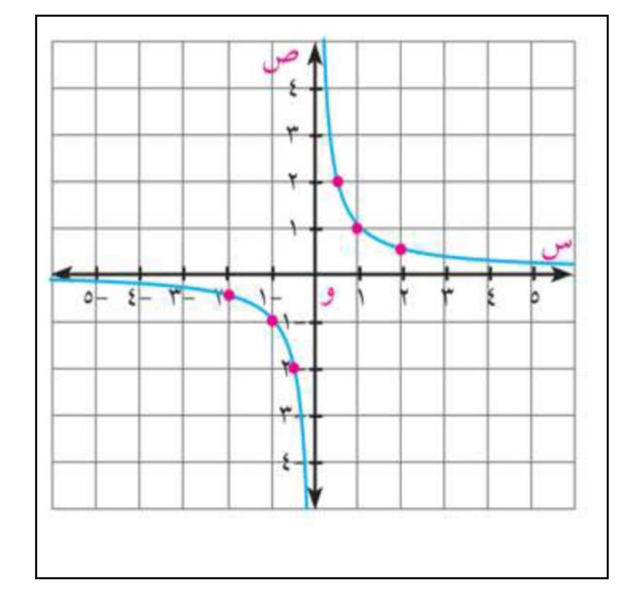
نقطة بداية الشعاعين الممثلين للدالة هى النقطة (٠ ، ٠)

د دالة ليست أحادية

الدالة تناقصية في] - ∞ ، ٠ [، الدالة تزايدية في] ٠ ، ∞ [



٢ـ الدالة الكسرية



أبسط صورة للدالة الكسرية هي :

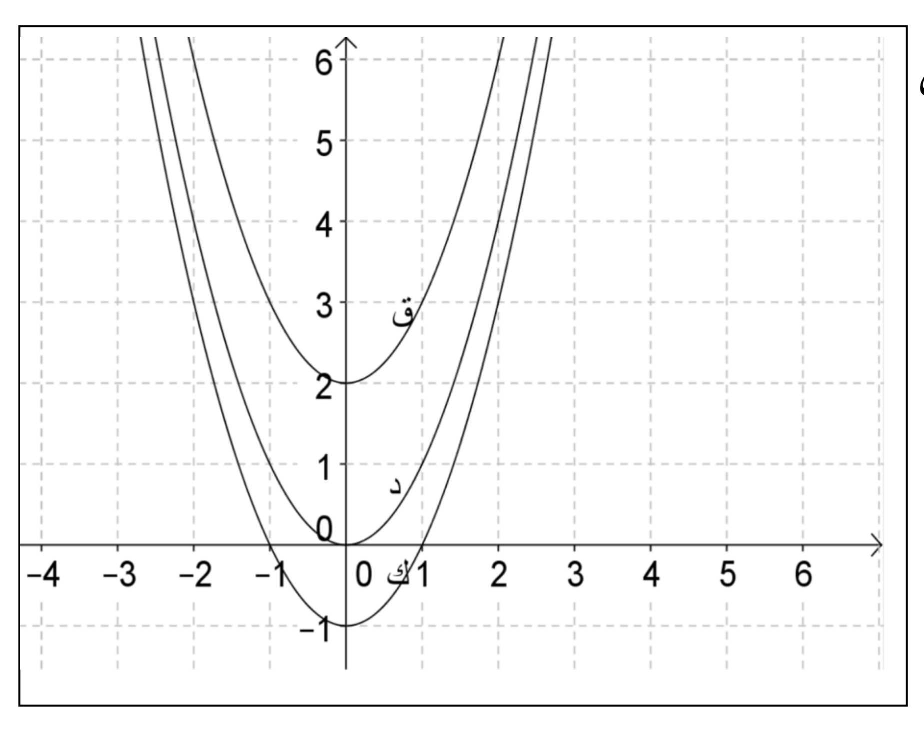
$$د(س) = \frac{١}{س}$$

المجال = ح ـ { ٠ } ، المدى = ح ـ { ٠ }

د دالة فردية حيث أن منحنى الدالة متماثل حول نقطة الاصل

د دالة أحادية

الدالة تناقصية في كل من] ـ ∞ ، ٠ [،] ٠ ، ∞ [



التحويلات الهندسية لمنحنيات الدوال

(١) الازاحة الرأسية لمنحنى الدالة

باستخدام برنامج Geogebra

(أسال معلمك عن هذا البرنامج)

تم رسم ثلاث دوال د ، ق ، ك حيث

$د(س) = س^٢$

$ق(س) = س^٢ + ٢$

$ك(س) = س^٢ - ١$

نلاحظ من الرسم أن:

منحنى ق هو صورة لمنحنى د بإزاحة راسية قدرها ٢ وحدة في الاتجاه الموجب لمحور الصادات

منحنى ك هو صورة لمنحنى د بإزاحة راسية قدرها ١ وحدة في الاتجاه السالب لمحور الصادات



وبصفة عامة يكون :

لأي دالة ق : ق(س) = د(س) + ﺃ يكون منحنى ق هو نفس منحنى د بإزاحة قدرها ﺃ وحدة في الاتجاه الموجب لمحور الصادات عندما ﺃ > ٠ ، و في الاتجاه السالب لمحور الصادات عندما ﺃ < ٠

(٢) الازاحة الافقية لمنحنى الدالة

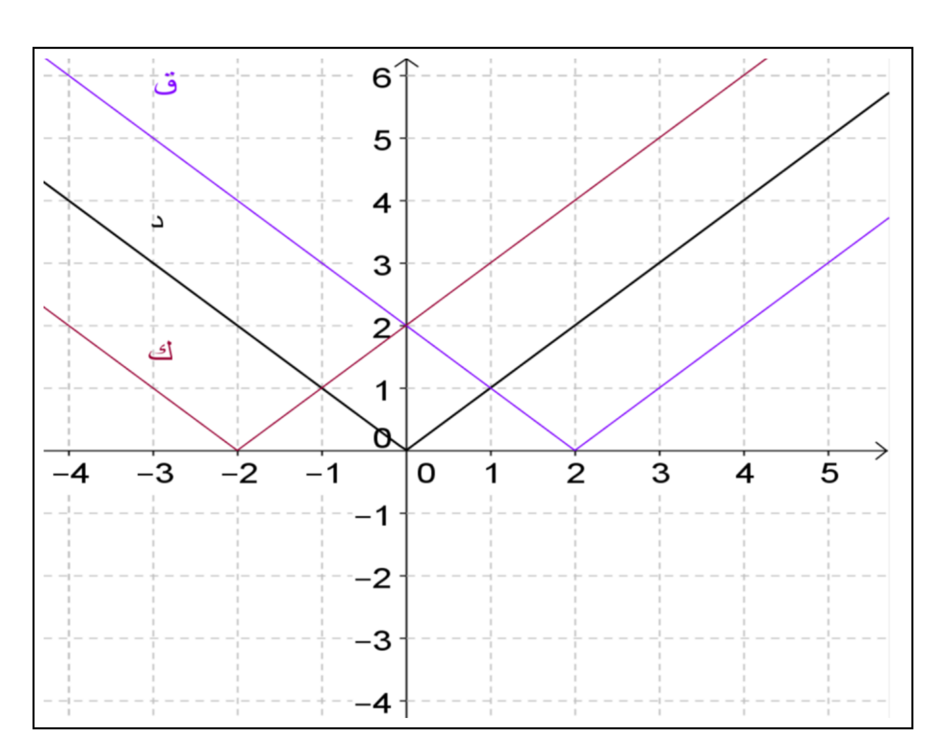
باستخدام برنامج Geogebra

تم رسم ثلاث دوال د ، ق ، ك حيث

د(س) = |س|

ق(س) = |س - ٢|

ك (س) = |س + ٢|



نلاحظ من الرسم أن

منحنى ق هو صورة لمنحنى د بإزاحة أفقية قدرها ٢ وحدة في الاتجاه الموجب لمحور السينات

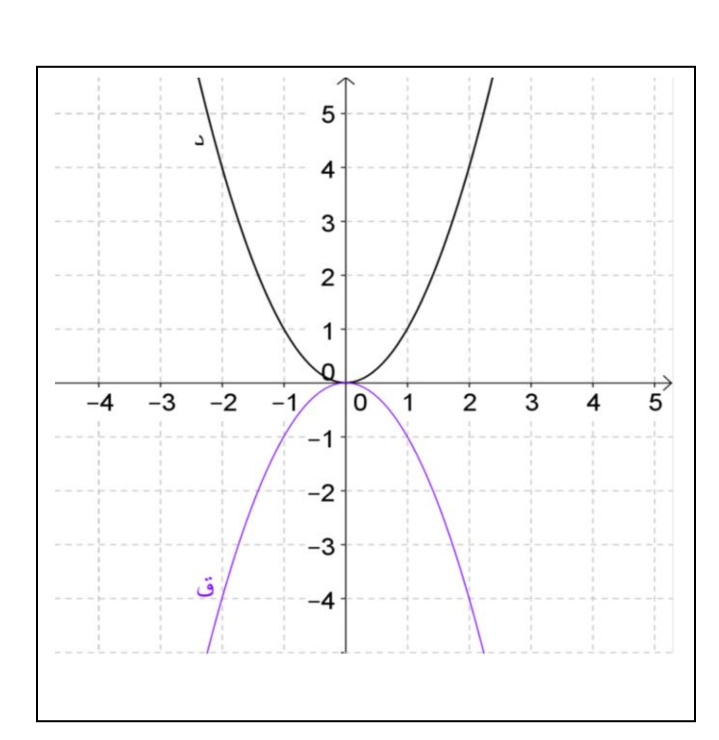
منحنى ك هو صورة لمنحنى د بإزاحة أفقية قدرها ٢ وحدة في الاتجاه السالب لمحور السينات

وبصفة عامة يكون :

لأي دالة ق : ق(س) = د(س + ﺃ) يكون منحنى ق هو نفس منحنى د بإزاحة قدرها ﺃ وحدة في الاتجاه الموجب لمحور السينات عندما ﺃ < ٠ ، و في الاتجاه السالب لمحور الصادات عندما ﺃ > ٠

(٣) انعكاس منحنى الدالة في محور السينات

باستخدام برنامج Geogebra



تم رسم الدالتين د ، ق

د(س) = س٢

ق(س) = - س٢

نلاحظ من الرسم أن

منحنى ق هو صورة لمنحنى د بالانعكاس

في محور السينات

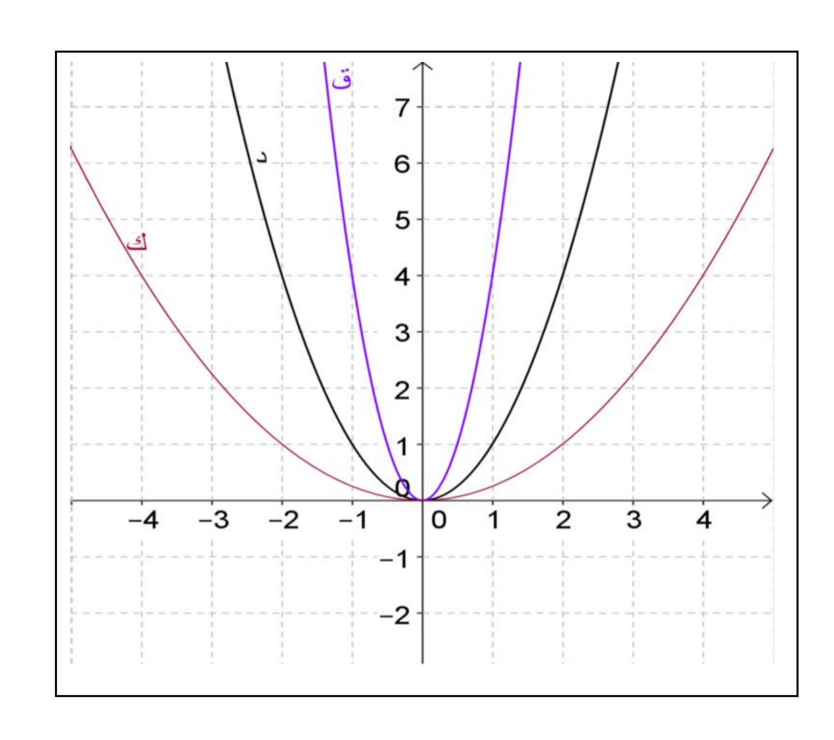
وبصفة عامة يكون :

لأي دالة ق: ق(س) =− د(س) يكون منحنى ق

هو نفس منحنى د بالانعكاس في محور السينات

(٤) تمدد منحنى الدالة

باستخدام برنامج Geogebra



تم رسم ثلاث دوال د ، ق ، ك حيث

د(س) = س٢

ق(س) =٢ س٢

ك (س) = $\frac{١}{٤}$ س٢

نلاحظ من الرسم أن



منحنى ق هو صورة لمنحنى د بتمدد رأسي (لاحظ معامل س ٢ في الدالة ق يساوي ٢ أي أكبر من ١)

منحنى ك هو صورة لمنحنى د بإنكماش رأسي(لاحظ معامل س ٢ في الدالة ك يساوي $\frac{1}{4}$ أي أنه عدد موجب أقل من ١)

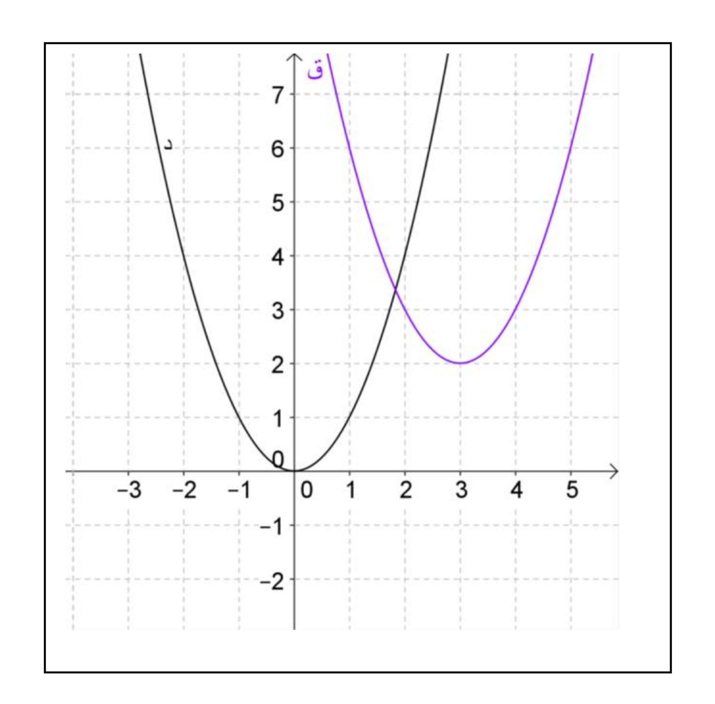
وبصفة عامة يكون :

لأي دالة ق : ق(س) = ٩ د(س) يكون منحنى ق هو نفس منحنى د بتمدد رأسي عندما ٩ > ١

وإنكماش رأسي عندما ٠ < ٩ < ١

مثال محلول (١):

الشكل المقابل يمثل الشكل البياني للدالة د:
د(س) = س٢ ، تم اجراء بعض التحويلات الهندسية على منحنى د فحصلنا على المنحنى ق صف التحويلات الهندسية الحادثة للمنحنى د للحصول على المنحنى ق ثم أكتب قاعدة الدالة ق مبينا نقطة رأس المنحنى- مجال ومدي الدالة – اطراد الدالة



الحل

منحنى ق هو صورة لمنحنى د بإزاحة قدرها ٣ وحدات في الاتجاه الموجب لمحور السينات ثم إزاحة ٢ وحدة في الاتجاه الموجب لمحور الصادات
قاعدة الدالة ق هي : ق(س) = (س – ٣)٢ +٢
نقطة رأس المنحنى هي (٣ ، ٢) ، مجال ق = ح ، مدى ق = [٢ ، ∞[
ق تناقصية في] - ∞ ، ٣ [، ق تزايدية] ٣ ، ∞ [

تدريب (١): **الشكل المقابل يمثل الشكل البياني للدالة د:**

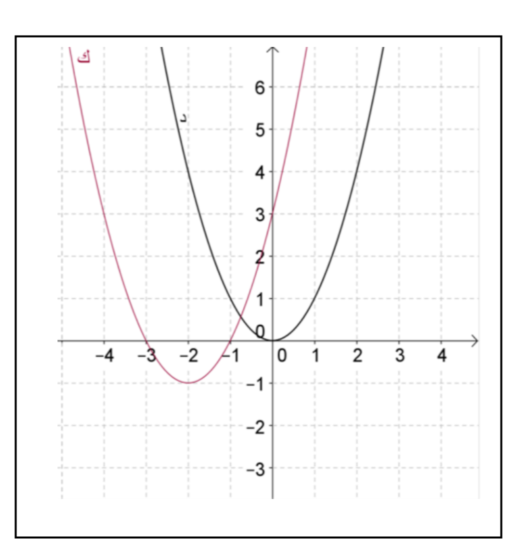
د(س) = س^{٢} ، تم اجراء بعض التحويلات

الهندسية على منحنى د فحصلنا على المنحنى ك

صف التحويلات الهندسية الحادثة للمنحنى د

للحصول على المنحنى ك ثم أكتب قاعدة الدالة ك

مبينا نقطة رأس المنحنى- مجال ومدي الدالة – اطراد الدالة



مثال محلول (٢):

الشكل المقابل يمثل الشكل البياني للدالة د:

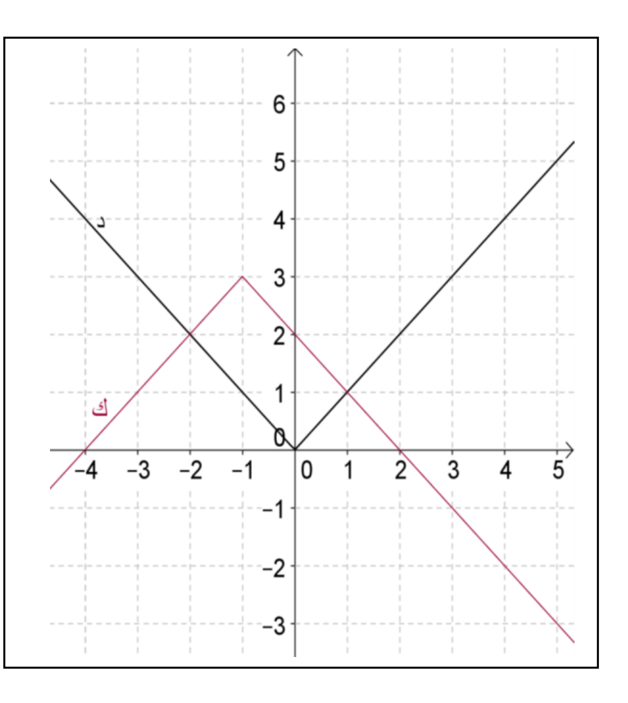
د(س) = |س| ، تم اجراء بعض التحويلات

الهندسية على منحنى د فحصلنا على المنحنى ك

صف التحويلات الهندسية الحادثة للمنحنى د

للحصول على المنحنى ك ثم أكتب قاعدة الدالة ك

مبينا نقطة بداية الشعاعين- مجال ومدي الدالة – اطراد الدالة



الحـــــــل

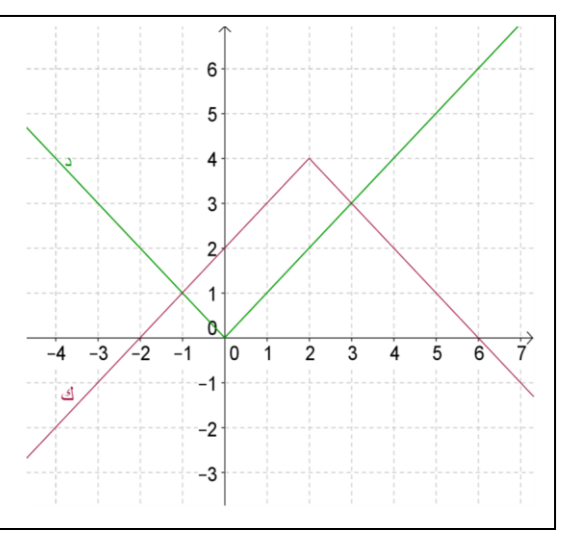
منحنى ك هو صورة لمنحنى د بالانعكاس في محور السينات ثم إزاحة قدرها وحدة واحدة في الاتجاه السالب لمحور السينات ثم إزاحة ٣ وحدات في الاتجاه الموجب لمحور الصادات

قاعدة الدالة ق هي : ق(س) = ـ|س +١| +٣

نقطة بداية الشعاين هي (ـ ١ ، ٣) ، مجال ق = ح ، مدي ق =]- ∞ ، ٣]

ق تزايدية في]- ∞ ، ـ ١ [، ق تناقصية] ـ١ ، ∞ [

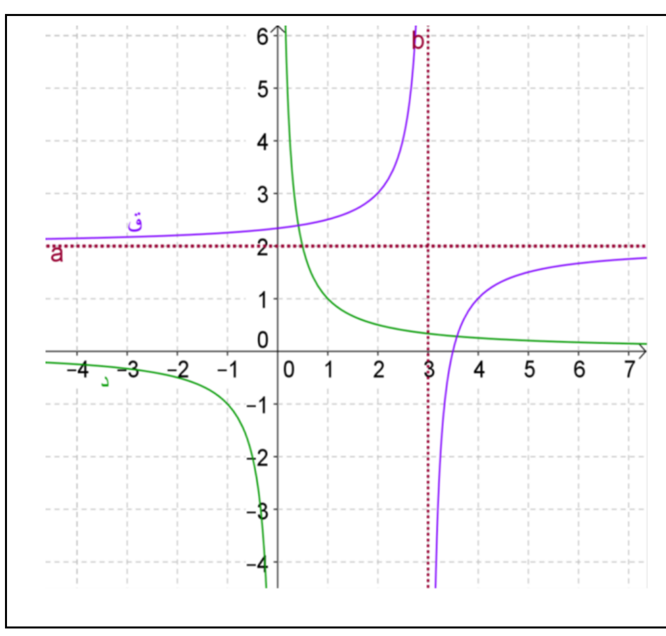
تدريب (٢):



الشكل المقابل يمثل الشكل البياني للدالة د:

د(س) = |س| ، تم اجراء بعض التحويلات الهندسية على منحنى د فحصلنا على المنحنى ك صف التحويلات الهندسية الحادثة للمنحنى د للحصول على المنحنى ك ثم أكتب قاعدة الدالة ك مبينا نقطة بداية الشعاعين- مجال ومدي الدالة – اطراد الدالة

مثال (٣):



الشكل المقابل يمثل الشكل البياني للدالة د:

د(س) = $\frac{١}{س}$ ، تم اجراء بعض التحويلات الهندسية على منحنى د فحصلنا على المنحنى ق صف التحويلات الهندسية الحادثة للمنحنى د للحصول على المنحنى ق ثم أكتب قاعدة الدالة ق مبينا نقطة تماثل المنحنى – مجال ومدي الدالة – اطراد الدالة

الحل

منحنى ق هو صورة لمنحنى د بإنعكاس في محور السينات ثم ازاحة قدرها ٣ وحدات في الاتجاه الموجب لمحور السينات ثم إزاحة ٢ وحدة في الاتجاه الموجب لمحور الصادات

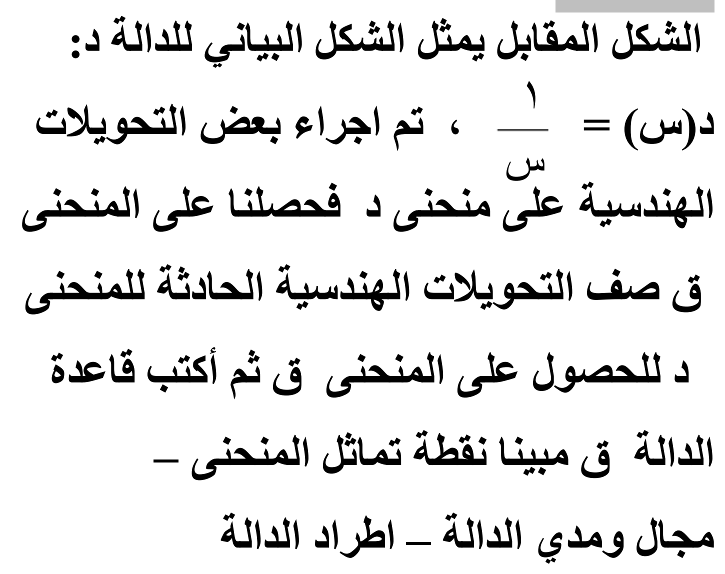
قاعدة الدالة ق هي : ق(س) = ـ $\frac{١}{س - ٣}$ + ٢

نقطة تماثل المنحنى هي (٣ ، ٢) ، المجال = ح ـ { ٣ } ، المدى = ح ـ { ٢ }

ق تزايديةفي] - ∞ ، ٣ [،] ٣ ، ∞ [

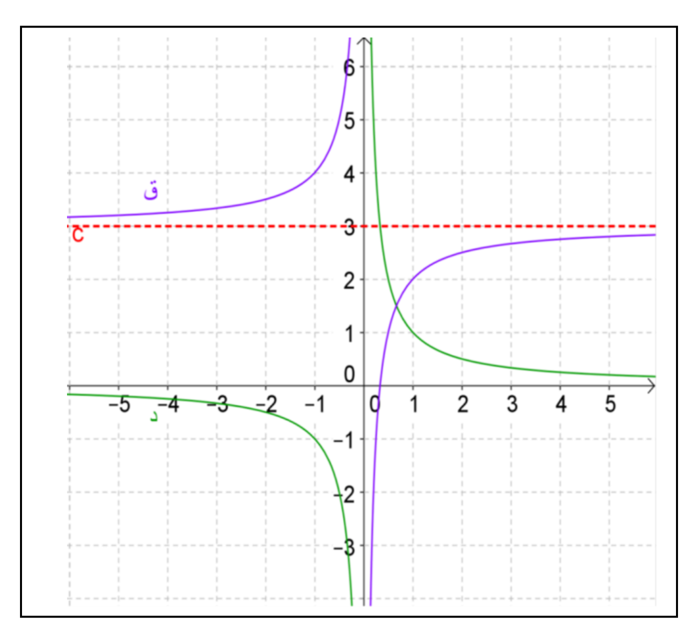


تدريب (٣)



الشكل المقابل يمثل الشكل البياني للدالة د:

د(س) = $\frac{١}{س}$ ، تم اجراء بعض التحويلات الهندسية على منحنى د فحصلنا على المنحنى ق صف التحويلات الهندسية الحادثة للمنحنى د للحصول على المنحنى ق ثم أكتب قاعدة الدالة ق مبينا نقطة تماثل المنحنى – مجال ومدي الدالة – اطراد الدالة



حلول التدريبات

تدريب (١):

منحنى ك هو صورة لمنحنى د بإزاحة قدرها ٢ وحدة في الاتجاه السالب لمحور السينات ثم إزاحة وحدة واحدة في الاتجاه السالب لمحور الصادات

قاعدة الدالة ك هي : ق(س) = $(س + ٢)^{٢}$ ـ ١

نقطة رأس المنحنى هي (ـ ٢ ، ـ ١) ، مجال ك = ح ، مدى ك = [ـ ١ ، ∞[

ك تناقصية في] - ∞ ، ـ ٢ [، ك تزايدية] ـ ٢ ، ∞ [

تدريب (٢):

منحنى ك هو صورة لمنحنى د بالانعكاس في محور السينات ثم إزاحة قدرها ٢ وحدة في الاتجاه الموجب لمحور السينات ثم إزاحة ٤ وحدات في الاتجاه الموجب لمحور الصادات

قاعدة الدالة ق هي : ق(س) = ـ|س ـ٢ | +٤

نقطة بداية الشعاعين هي (٢ ، ٤) ، مجال ق = ح ، مدي ق =] - ∞ ، ٤]

ق تزايدية في] - ∞ ، ٢ [، ق تناقصية] ٢ ، ∞ [



تدريب (٣):

منحنى ق هو صورة لمنحنى د بإنعكاس في محور السينات ثم ازاحة قدرها ٣ وحدات في الاتجاه الموجب لمحور الصادات

قاعدة الدالة ق هي : ق(س) = $-\frac{١}{س} + ٣$

نقطة تماثل المنحنى هي (٠ ، ٣) ، المجال = ح - { ٠ } ، المدى = ح - { ٣}

ق تزايديةفي] -∞ ، ٠ [،] ٠ ، ∞ [

تمارين على الدرس الرابع: اختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة

١) **منحنى الدالة د : د(س) = $س^٢ + ٣$ نحصل عليه بإزاحة منحنى الدالة هـ : هـ(س) = $س^٢$ ٣ وحدات في اتجاه ....**

(أ) $\overleftarrow{وس}$ (ب) $\overleftarrow{وس'}$

(ج) $\overleftarrow{وص}$ (ء) $\overleftarrow{وص'}$

٢) **نقطة تماثل منحنى الدالة د : د(س) = $\frac{١}{س} + ١$ هي ....**

(أ) (٠ ، ١) (ب) (٠ ، -١)

(ج) (١ ، ٠) (ء) (-١ ، ٠)

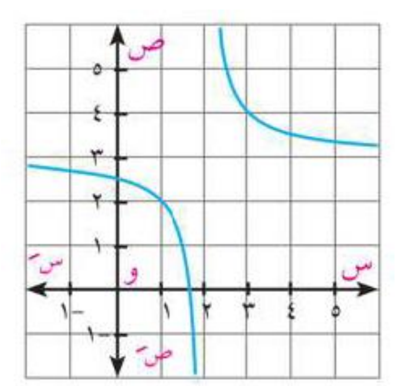
٣) **نقطة رأس المنحى الدالة د : د(س) = $(س + ٣)^٢ - ٢$ هي ....**

(أ) (٣ ، -٢) (ب) (-٣ ، -٢)

(ج) (٣ ، ٢) (ء) (-٣ ، ٢)



٤) الشكل المقابل هو الشكل البياني للدالة د : د(س) =........



(أ) $\frac{١}{س + ٢} + ٣$

(ب) $\frac{١}{س + ٢} - ٣$

(ج) $\frac{١}{س - ٢} + ٣$

(د) $\frac{١}{س - ٢} - ٣$

٥) منحنى الدالة ر : ر (س) = $-$ (س+٢)^{٢} نحصل عليه من منحنى الدالة د : د (س) = س^{٢}

عن طريق......................

(أ) إنعكاس في محور السينات ثم إزاحة قدرها وحدتان في اتجاه $\overleftarrow{\text{و س}^/}$

(ب) إنعكاس في محور السينات ثم إزاحة قدرها وحدتان في اتجاه $\overleftarrow{\text{و س}}$

(ج) إنعكاس في محور الصادات ثم إزاحة قدرها وحدتان في اتجاه $\overleftarrow{\text{و س}^/}$

(د) إنعكاس في محور الصادات ثم إزاحة قدرها وحدتان في اتجاه $\overleftarrow{\text{و س}}$

٦) الدالة د : د(س) = | س + ١ | + ٢ يمثلها بيانيا شعاعان نقطة بدايتهما هي النقطة ....

(أ) (١ ، ٢)　　(ب) (-١ ، ٢)

(ج) (١ ،-٢)　　(د) (-١ ، -٢)



٧) الدالة د : د(س) = | س + ١ | + ٢ تكون تزايدية في ....

(أ)]١ ، ∞[(ب)]-١ ، ∞[

(جـ)]-∞ ، ١[(ء)]-∞ ،-١[

٨) مدى د : د(س) = - | س + ١ | + ٢ يساوي ....

(أ)]١ ، ∞[(ب)]-١ ، ∞[

(جـ)]-∞ ، ٢] (ء)]-∞ ،-٢[

٩) مدى الدالة د : د(س) = $\frac{١}{س + ٤}$ - ٣ يساوي ....

(أ) ح - {٣} (ب) ح - {-٣}

(جـ) ح - {٤} (ء) ح - {-٤}

١٠) الدالة د : د(س) = $\frac{-١}{س + ٤}$ تكون تزايدية في..........

(أ) ح - {-٤} (ب)]٠ ، ∞[

(جـ)]-∞ ، ٠[(ء)]-∞ ،-٤[،]-٤ ، ∞[

حلول تمارين الدرس الرابع

١) جـ	٢) أ	٣) ب	٤) جـ	٥) أ
٦) ب	٧) ب	٨) جـ	٩) ب	١٠) ء



الصف الثاني الثانوي – القسم العلمي
الوحدة الأولى – الدوال الحقيقية ورسم المنحنيات

الدرس الخامس: حل معادلات ومتباينات القيمة المطلقة

ملخص الدرس: إذاكانت س ∈ ع فأن | س | = { س : س ≥ ٠ ، ـ س : س < ٠ }

- | ا | ≥ ٠
- | اب | = | ا | × | ب |
- إذا كان أ، ب عددين حقيقين: |أ| = | ب | ⟸⟹ أ = ± ب
- إذا كان أ ∈ ع⁺ ، | س | = أ فأن س = ± أ
- إذا كان | س | ≤ أ فأن - أ ≤ س ≤ أ
- إذا كان | س | ≥ أ فأن س ≥ أ أو س ≤ -أ
- | س |^٢ = | س^٢| = س^٢ ، √س^٢ = |س|

مثال محلول (١): أوجد مجموعة الحل في ع للمعادلة: | س - ٢ | = ٣

الحـــــــــــــــل

س - ٢ = ٣ ⁝ س - ٢ = - ٣
س = ٥ ⁝ س = -١

م.ح = { ٥، -١ }

تدريب (١): أوجد مجموعة الحل في ع للمعادلة : | س - ١ | - ٢ = ٤

مثال محلول (٢): أوجد مجموعة الحل في ع للمعادلة | ٢س - ٤ | = | س + ١ |

الحـــــــــــــــل

٢س - ٤ = س + ١ ⁝ ٢س - ٤ = - س - ١
س = ٥ ⁝ س = ١

م.ح = { ٥، ١ }



تدريب (٢): اختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة :

مجموعة الحل في ع للمعادلة : | ٥س −١ | = | س |

(أ) ∅ (ب) { ١/٤ } (ج) { ١/٦ } (د) { ١/٦ ، ١/٤ }

مثال محلول (٣): أوجد مجموعة الحل في ع للمعادلة: | س +٢ | + س −٢=٠

الحـــــــــــــــل

س ≥ −٢	س < −٢
س+٢+ س −٢=٠	−س −٢+ س −٢=٠
٢س = ٠	−٤=٠ مرفوض (غير ممكن)
س = ٠	م.ح = { صفر }

تدريب (٣): أوجد مجموعة الحل في ع للمعادلة : | س +٢ | − س +١=٠

مثال محلول (٤): أوجد مجموعة الحل للمتباينة الاتية في ع : | س −٣ | ≤ ٥

الحـــــــــــــــل

−٥≤س − ٣ ≤ ٥

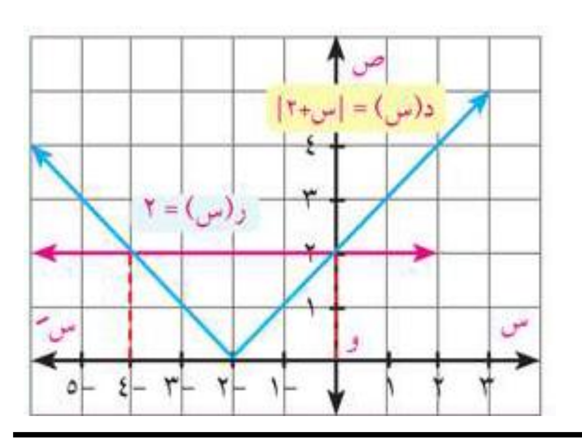
−٢ ≤ س ≤ ٨

م.ح = [−٢، ٨]

تدريب (٤): أوجد مجموعة الحل للمتباينة الاتية في ع : | س −٤ | > ٢

مثال محلول (٥): أوجد بيانيا في ع مجموعة الحل للمعادلة : | س +٢ | = ٢

الحـــــــــــــــــــل



بفرض أن :

د (س) = | س +٢ |

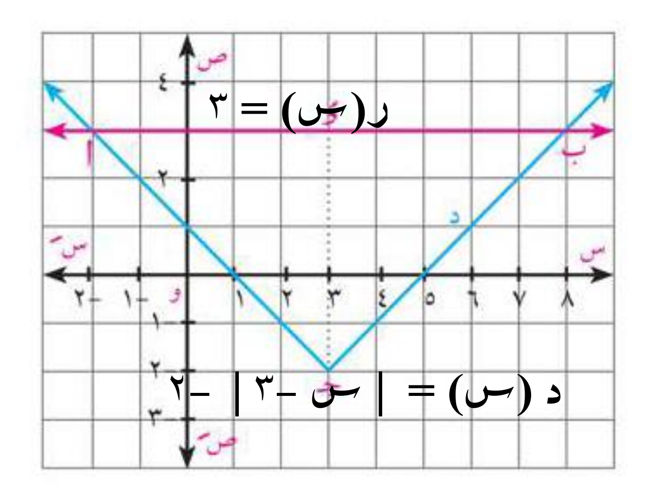
ر(س) = ٢

م.ح = { صفر، −٤ }

تدريب (٥): أوجد بيانيا في ع مجموعة الحل للمعادلة : | ٢س +٦ | =٨

مثال محلول (٦): أوجد بيانيا في ع مجموعة الحل للمتباينة : | س −٣ | −٢> ٣

الحـــــــــــــــــــل



بفرض أن :

د (س) = | س −٣ | −٢

ر(س) = ٣

م.ح =] -٢، ٨ [

تدريب (٦): أوجد بيانيا في ع مجموعة الحل للمتباينة : | س −٥ | > ٤

مثال محلول (٧): أوجد في ع مجموعة الحل للمتباينة : | س −١ | >٣

الحــــــــــــل

س −١ >٣	س −١ < −٣
س >٤	س < −٢

م . ح = ع −[−٢، ٤]

تدريب (٧):

أوجد في ع مجموعة الحل للمتباينة : | س +١ | >٢

حلول التدريبات

حل تدريب (١): م.ح = { −٥، ٧ }

حل تدريب (٢): ع { $\frac{1}{6}$، $\frac{1}{4}$ }

حل تدريب (٣): م.ح = ∅

حل تدريب (٤): م.ح = ع −]٢، ٦ [

حل تدريب (٥): م.ح = { −٧، ١ }

حل تدريب (٦): م.ح =] ١، ٩ [

حل تدريب (٧): م . ح = ع −]−٣، ١[



تمارين على الدرس الخامس:

اختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة :

١) **مجموعة الحل في ع للمعادلة :** | س - ٣ | = س - ٣ هي..............

(أ) ∅ (ب) { ٣ } (ج) [٣ ، ∞ [(د) ع

٢) **مجموعة الحل في ع للمعادلة :** | س + ٥ | = ٧ هي ....

(أ) ∅ (ب) { − ٢ } (ج) ع (د) { − ١٢ ، ٢ }

٣) **مجموعة الحل في ع للمعادلة :** | س + ٣ | + ٥ = ٢

(أ) ع (ب) ∅ (ج) { − ٣ } (د) { − ٥ ، − ٢ }

٤) **مجموعة الحل في ع للمتباينة :** | س +٣ | > ٤

(أ) ∅ (ب) [−٧ ، ١] (ج)] −٧ ، ١ [(د) ع

٥) **مجموعة الحل في ع للمتباينة :** | س +٥ | ≥ -٣

(أ)] − ٥ ، − ٣ [(ب) ∅ (ج) [− ٨ ، ٢] (د) ع

٦) **مجموعة الحل في ع للمعادلة :** | س | + ١ = ٠ هي..............

(أ) ∅ (ب) { − ١ } (ج) [- ١ ، ∞ [(د) ع

٧) **مجموعة الحل في ع للمعادلة :** | س | = س هي ....

(أ) ∅ (ب) [٠ ، ∞ [(ج) ع (د)] ٠ ، ∞ [

٨) **مجموعة الحل في ع للمعادلة** : | س | = − س هي ....

(أ) ع   (ب) $]-\infty ، ٠]$ (ج) $\varnothing$ (د) $]-\infty ، ٠[$

٩) **إذا كان س < ١** فإن $\frac{س^{٢} - ١}{\sqrt{س^{٢} - ٢س + ١}}$ = ...

(أ) س + ١   (ب) س − ١   (ج) − س + ١   (د) − س − ١

١٠) | π − ٣ | − | ٣ − π | = ...

(أ) − ٦   (ب) ٢ π   (ج) صفر   (د) − ٢ π

حلول تمارين على الدرس الخامس:

١) ج   ٢) د   ٣) ب   ٤) ج   ٥) د

٦) أ   ٧) ب   ٨) ب   ٩) د   ١٠) ج



تمارين علي الوحدة الأولى
الصف الثاني الثانوي علمي (رياضيات بحتة)

اولا: الاسئلة الموضوعية :

السؤال الأول : اختر الاجابة الصحيحة من الاجابات المعطاة :

١) مجال الدالة د : د(س) = $\frac{س + ١}{س - ١}$ هو.................

ⓐ ح – { ـ١ }   ⓑ ح – { ١ }   ⓒ ح – { ـ١ ، ١ }   ⓓ ح – { ٠ }

٢) نقطة تماثل المنحنى للدالة د حيث د(س) = $(س + ٢)^٣$ ـ ١ هي..................

ⓐ (٢ ، ١)   ⓑ (ـ٢ ، ١)   ⓒ (ـ٢ ، ـ١)   ⓓ (٢ ، ـ١)

٣) الدالة الزوجية فيما يلي هي ....

ⓐ د(س) = $س^٢$ ⓑ د(س) = $س^٣$ ⓒ د(س) = س   ⓓ د(س) = $\frac{١}{س}$

٤) مجموعة حل المعادلة | س | - ١ = ٠ هي..............

ⓐ { ١ }   ⓑ Ø   ⓒ { ـ١ }   ⓓ { ـ١ ، ١ }

٥) مجموعة حل المتباينة | س ـ ٥ | < ٣ هي..............

ⓐ] ٢ ، ٨ [ⓑ [٢ ، ٨]   ⓒ ح -] ٢ ، ٨ [ⓓ ح - [٢ ، ٨]

٦) مجال الدالة د : د(س) = $\sqrt{- س}$ هو.................

ⓐ ح – { ٠ }   ⓑ ح   ⓒ] ٠ ، ∞ [ⓓ] - ∞ ، ٠]



٧) إذا كانت د ، هـ دالتان حيث د(س) = ٢ س + ١ ، هـ (س) = $\sqrt{س+٢١}$
فإن (د ٥ هـ)(٤)=...

(أ) ١١ (ب) ٩ (جـ) $\sqrt{٣٠}$ (ء) ٥

٨) الدالة الاحادية فيما يلي هي ....

(أ) د(س) = س^{٢} (ب) د(س) = ٧ (جـ) د(س) = جتا س (ء) د(س) = $\frac{١}{س}$

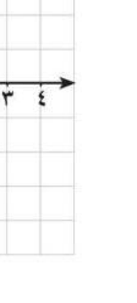
٩) مجموعة حل المعادلة | س | + س = ٠ هي...............

(أ) ح (ب) Ø (جـ)]- ∞ ، ٠[(ء)]- ∞ ، ٠]

١٠) مجموعة حل المتباينة | س – ٣ | > ٥ هي...............

(أ)]-٢ ، ٨[(ب) [-٢ ، ٨] (جـ) ح -]-٢ ، ٨[(ء) ح - [-٢ ، ٨]

١١) إذا كان الشكل المقابل يمثل الرسم البياني للدالة د



فإن مدى الدالة د = ...

(أ) ح – {- ١ } (ب) ح – { ١ }

(جـ) ح – { ١ ، -١ } (ء) { ١ ، -١ }

١٢) إذا كان د(س) = { س^{٢} + ٣ عندما -٣ ≤ س < ٢
٥س – ٤ عندما س ≥ ٢

فإن د (٣) + د (-١) =...............

(أ) ١١ (ب) ١٥ (جـ) ٤ (ء) ٤٤



١٣) إذا كانت د (س) = م س^{٢} + ب ، وكان د(٣) = ٧ فإن د(- ٣) =.....

(م) صفر (ب) ٧ (جـ) - ٧ (ء) ١٤

١٤) نقطة تماثل منحنى الدالة د : د(س) = $\frac{١}{س - ١}$ - ١ هي ....

(م) (١ ، ١) (ب) (١ ، -١) (جـ) (-١ ، ١) (ء) (-١ ، -١)

١٥) مجموعة حل المعادلة | ٣ - ٢ س | = ٥ هي...............

(م) { -١ ، ٤ } (ب) { ٥ ، -٥ } (جـ) { ٤ ، ٠ } (ء) { -١ ، ٣ }

١٦) مجموعة حل المتباينة | س | ≤ ٢ هي ....

(م) [-٢ ، ٢] (ب)] -٢ ، ٢ [(جـ) ح -] -٢ ، ٢ [(ء) ح - [-٢ ، ٢]

١٧) الدالة الاحادية فيما يلي د : د(س)= هي ....

(م) ٧ (ب) | س | (جـ) جا س (ء) س

١٨) منحنى الدالة د : د(س) = - (٣ - س)^{٢} نحصل عليه عن طريق ......

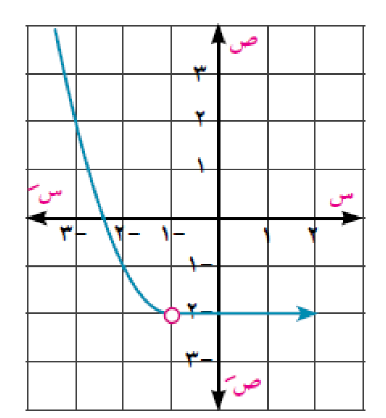
(م) انعكاس لمنحنى الدالة هـ (س) = س^{٢} في محور السينات ثم إزاحة ٣ وحدات لأسفل

(ب) انعكاس لمنحنى الدالة هـ (س) = س^{٢} في محور السينات ثم إزاحة ٣ وحدات لأعلى

(جـ) انعكاس لمنحنى الدالة هـ (س) = س^{٢} في محور السينات ثم إزاحة ٣ وحدات يسارا

(ء) انعكاس لمنحنى الدالة هـ (س) = س^{٢} في محور السينات ثم إزاحة ٣ وحدات يمينا

١٩) إذا كان الشكل المقابل يمثل الشكل البياني للدالة د



فإن (د ∘ د) (٠) = ...

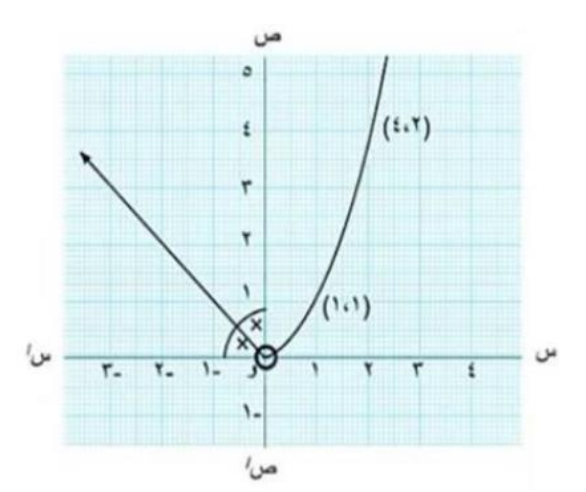
Ⓐ غير معرف

Ⓑ صفر

Ⓒ -١

Ⓓ -٢

٢٠) الشكل المقابل يمثل الشكل البياني للدالة د :



Ⓐ د(س) = $س^٢$

Ⓑ د(س) = |س|

Ⓒ د(س) = { $س^٣$: س > ٠ ، - س : س < ٠ }

Ⓓ د(س) = { $س^٢$: س > ٠ ، - س : س < ٠ }



ثانيا : الاسئلة المقال :

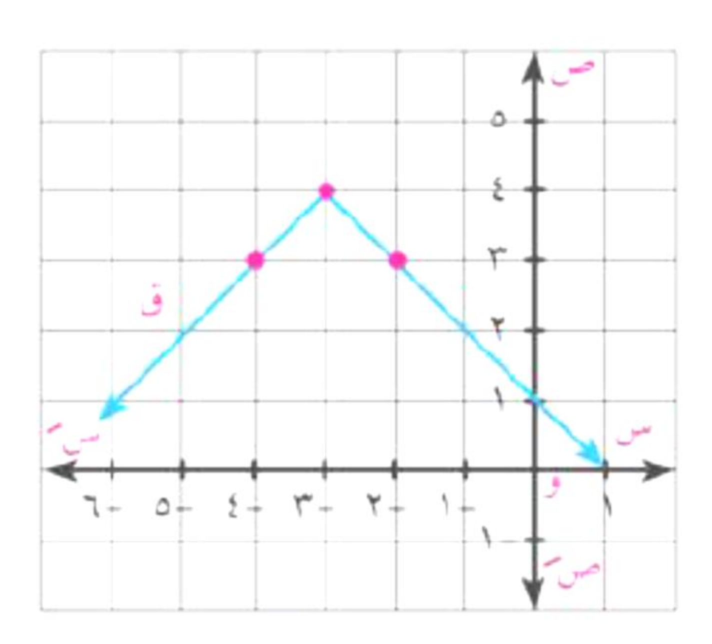
١) إذا كان مجال الدالة د : $د(س) = \frac{١}{س^{٢} + ٢س + ك}$

هو ح (مجموعة الأعداد الحقيقية) فعين جميع قيم ك الممكنة

٢) اكتب قاعدة الدالة الممثلة

في الشكل المقابل و عين مجالها – مداها

ثم ابحث اطرادها



٣) أوجد مجموعة حل المتباينة

$| ٢ س – ٣ | > ٥$

٤) عين مجال الدالة د : $د(س) = \sqrt{س + ١} - \frac{١}{س}$



حل تمارين على الوحدة الأولى (القسم العلمى)

اولا: الاسئلة الموضوعية :

١) ب	٢) جـ	٣) أ	٤) ء	٥) أ
٦) ء	٧) أ	٨) ء	٩) ء	١٠) ء
١١) أ	١٢) ب	١٣) ب	١٤) ب	١٥) أ
١٦) ء	١٧) ء	١٨) ء	١٩) جـ	٢٠) ء

ثانيا : اجابةالاسئلة المقال :

١) ك ∋] ١ ، ∞ [

٢) د(س) = - | س + ٣ | + ٤

المجال = ح ، المدي =] - ∞ ، ٤]

الدالة تزايدية في] - ∞ ، -٣ [، الدالة تناقصية في] -٣، ∞ [

٣) ح ــ] - ١ ، ٤[

٤) مجا ل د =] - ١ ، ∞ [- { ٠ }



الصف الثاني – القسم العلمي - الاختبار الاول على الوحدة الاولى

اولا: الاسئلة الموضوعية :

في البنود من (١ : ١٠) لكل بند أربع خيارات احداها فقط صحيحة ظلل دائرة الاختيار الصحيح

١) مجال الدالة د : د(س) = $\frac{س}{س + ١}$ هو..................

ⓐ ح – { ـ ١ }　　ⓑ ح – { ١ }

ⓙ ح – { ـ١ ، ١ }　　ⓓ ح – { ٠ }

٢) نقطة تماثل المنحنى للدالة د حيث د(س) = (س -٣)^{٣} + ٢ هي..................

ⓐ (٢ ، ٣)　　ⓑ (ـ٢ ، ٣)

ⓙ (٣، ٢)　　ⓓ (٢ ، ـ ٣)

٣) الدالة الفردية فيما يلي هي ....

ⓐ د(س) = س^{٢}　　ⓑ د(س) = س^{٣}

ⓙ د(س) = س+٢　　ⓓ د(س) = $\frac{١}{س}$ + ٤

٤) مجموعة حل المعادلة | س | + ١ = ٠ هي..............

ⓐ { ١ }　　ⓑ Ø

ⓙ { ـ ١ }　　ⓓ { ـ ١ ، ١ }



٥) مجموعة حل المتباينة | س ــ ٥ | ≥ ٣ هي...............

ﺃ)] ٢ ، ٨ [ب) [٢ ، ٨]

ﺟ) ح -] ٢ ، ٨ [ء) ح - [٢ ، ٨]

٦) مجال الدالة د : د(س) = √س هو.................

ﺃ) ح – { ٠ } ب) ح

ﺟ)] ٠ ، ∞ [ء)] -∞ ، ٠]

٧) إذا كانت د ، هـ دالتان حيث د(س) = ٢ س + ١ ، هـ (س) = √س+١٢
فإن (د ٥ هـ)(٤)=...

ﺃ) ١١ ب) ٩

ﺟ) √٣٠ ء) ٥

٨) الدالة الاحادية فيما يلي هي ....

ﺃ) د(س) = س^{٢} ب) د(س) = ٧

ﺟ) د(س) = جتا س ء) د(س) = $\frac{١}{س}$

٩) **مجموعة حل المعادلة | س | + س = ٠ هي..............**

أ) ح　　　　ب) $\emptyset$

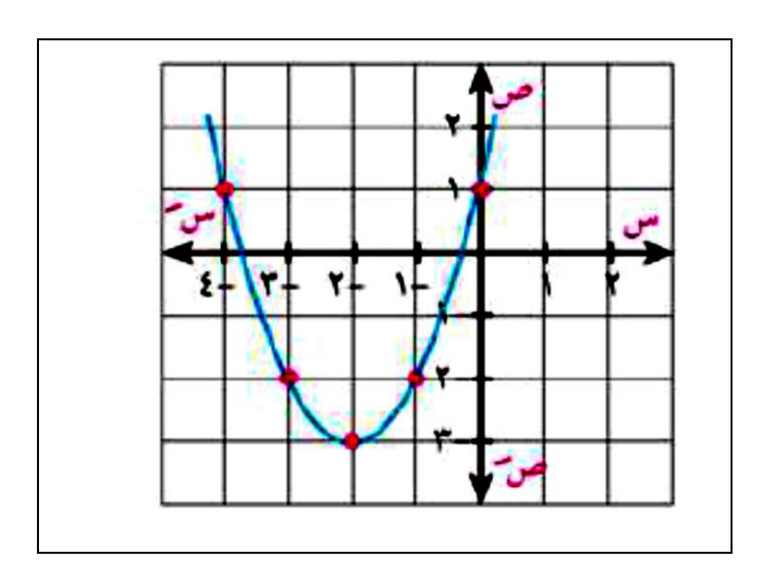
ج) $]-\infty ، ٠[$　　　　د) $]-\infty ، ٠]$

١٠) **مجموعة حل المتباينة | س ــ ٣ | ≤ ٥ هي..............**

أ) $]-٢ ، ٨[$　　　　ب) $[-٢ ، ٨]$

ج) ح - $]-٢ ، ٨[$　　　　د) ح - $[-٢ ، ٨]$

ثانيا : الاسئلة المقال :



١) **إذا كان الشكل المقابل يمثل الشكل البياني لدالة تربيعة د فأكتب قاعدة الدالة وعين مجالها ومداها ثم ابحث اطرادها.**

٢) **عين مجال الدالة د : د(س) = $\sqrt{س + ١} - \frac{١}{س - ٢}$**



حل الاختبار الاول على الوحدة الأولى(القسم العلمى)

اولا: الاسئلة الموضوعية :

١) أ　　٢) جـ　　٣) ب　　٤) ب　　٥) ب

٦) جـ　　٧) ب　　٨) ء　　٩) ء　　١٠) جـ

ثانيا : الاسئلة المقال :

١) د(س) = (س + ٢)^{٢} – ٣

المجال = ح　　،　　المدي = [- ٣ ، ∞ [

الدالة تناقصية في] - ∞ ، -٢]　　،　　الدالة تزايدية في [-٢، ∞ [

٢) مجا ل د = [- ١ ، ∞ [- { ٢ }



الصف الثاني – القسم العلمي - الاختبار الثاني على الوحدة الاولى

اولا: الاسئلة الموضوعية :

في البنود من (١ : ١٠) لكل بند أربع خيارات احداها فقط صحيحة ظلل دائرة الاختيار الصحيح

١) مجال الدالة د : د(س) = $\frac{١}{س}$ + $\sqrt{س + ١}$ هو..................

(أ) ح – { ٠ }
(ب)] -١ ، ∞ [– { ٠ }
(ج) ح – { -١ ، ٠ }
(ء) [-١ ، ∞ [– { ٠ }

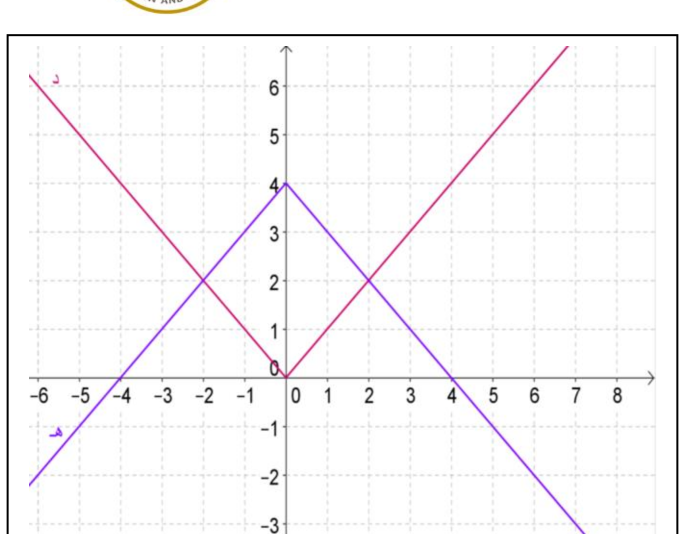
٢) كلا الدالتان د ، هـ حيث د(س) = س ^{٢} ، هـ (س) = |س|
تتفقان في كل مما يلي عدا أن ....

(أ) كلاهما دوال زوجية
(ب) كلاهما دوال تزايدية في] ٠ ، ∞ [
(ج) منحنيا الدالتان يمران بالنقطة (-١ ، ١)
(ء) كلاهما دوال كثيرات حدود

٣) الدالة د : د(س)= جاس دالة ....

(أ) زوجية
(ب) تزايدية على مجالها
(ج) احادية
(ء) يمثلها منحنى نقطة تماثلة هي (٠،٠)





٤) **الشكل المقابل يمثل الشكل البياني للدالتين**

د ، هـ فإن مجموعة حل المتباينة :

هـ (س) > د(س) هي.........

(أ)] -٢ ، ٢[(ب) [-٢ ، ٢]

(ج) ح –] -٢ ، ٢[(ء) ح – [-٢ ، ٢]

٥) **مجموعة حل المتباينة | س ــ ٥ | ≤ ٣ هي..............**

(أ)] ٢ ، ٨ [(ب) [٢ ، ٨]

(ج) ح -] ٢ ، ٨ [(ء) ح - [٢ ، ٨]

٦) **مجال الدالة د : د(س) = √(٢ - س) هو...............**

(أ) ح – { ٢ } (ب) ح

(ج)] ٢ ، ∞] (ء) [-∞ ، ٠]

٧) **إذا كانت د ، هـ دالتان حيث د(س) = س^{٢} ، هـ (س) = √س فإن مجال (د ه هـ)=....**

(أ) ح (ب)] ٠ ، ∞]

(ج) ح – { ٠ } (ء)] ٠ ، ∞ [

٨) الدالة الاحادية فيما يلي هي ....

(أ) د(س) = | س |

(ب) د(س) = ٦

(ج) د(س) = جتا س

(ء) د(س) = $\frac{١}{س + ٣}$

٩) مجموعة حل المعادلة | س | ـ س^{٢} = ٠ هي...............

(أ) { ٠ }

(ب) ∅

(ج) { -١ ، ١ }

(ء) { -١ ، ٠ ، ١ }

١٠) مجموعة حل المتباينة | س | > س هي...............

(أ) ∅

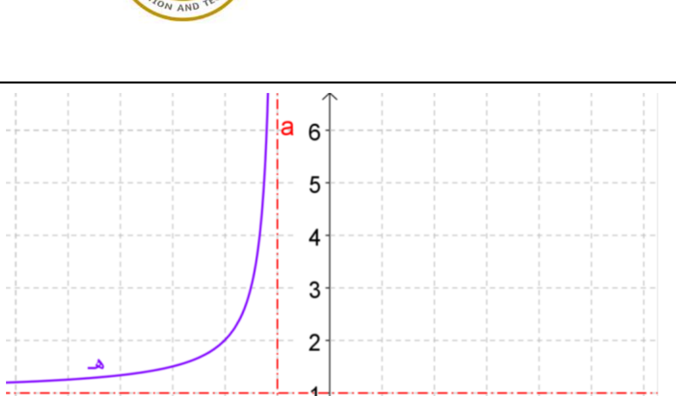
(ب)] ٠ ، ∞ [

(ج)] -∞ ، ٠ [

(ء) ح



ثانيا : الاسئلة المقال :



١) إذا كان الشكل المقابل يمثل الشكل البياني

لدالة د : فأكتب قاعدة الدالة وعين

مجالها ومداها ثم ابحث اطرادها.

٢) عين مجال الدالة د : د(س) = $\sqrt{س + ٣}$ + $\sqrt{١ - س}$

حل الاختبار االثاني على الوحدة الأولى(القسم العلمى)

اولا: الاسئلة الموضوعية :

١) ب	٢) ء	٣) ء	٤) م	٥) جـ
٦) ء	٧) ب	٨) ء	٩) ء	١٠) جـ

ثانيا : الاسئلة المقال :

١) د(س) = ١ - $\frac{١}{س+١}$

المجال = ح - { -١ } ، المدي = ح - { ١ }

الدالة تزايدية في] - ∞ ، -١ [،] -١ ، ∞ [

٢) مجا ل د = [-٣ ، ١]



رياضيات - جبر

الصف الثانى الثانوى (علمى)

الوحدة الثانية

(الأسس واللوغاريتمات وتطبيقات عليها)

المحتويات

الصف الثاني الثانوي – القسم العلمى
الوحدة الثانية – الأسس واللوغاريتمات وتطبيقات عليها

الدرس الأول: الأسس الكسرية

المفاهيم الاساسية للدرس:

تعريف لكل أ ∈ ح ولكل ن ∈ $ص^{+}$ فإن :

١) $أ^{ن} = أ \times أ \times أ \times أ \times \ldots\ldots\times أ$ (حيث العامل أ مكرر ن من المرات)

٢) $أ^{صفر} = ١$ حيث أ ≠ صفر

٣) $أ^{-١} = \frac{١}{أ}$ حيث أ ≠ صفر ٤) $أ^{-ن} = \frac{١}{أ^{ن}}$ حيث أ ≠ صفر

خواص الأسس الصحيحة : لكل أ ∈ ح - {٠} ، ب ∈ ح - {٠} ، م ∈ ص ، ن ∈ ص

١) $أ^{م} \times أ^{ن} = أ^{م+ن}$ ٢) $(أ ب)^{ن} = أ^{ن} ب^{ن}$

٣) $أ^{م} \div أ^{ن} = أ^{م-ن}$ ٤) $\left(\frac{أ}{ب}\right)^{ن} = \frac{أ^{ن}}{ب^{ن}}$ ٥) $(أ^{م})^{ن} = أ^{م ن}$

أمثلة محلولة

مثال (١): أختصر لابسط صورة

$$\frac{٢٥^{٤ك-١} \times ٩^{٢ك-٢}}{٥^{٧ك-١} \times ٤٠٥^{ك-١}}$$

الحل : نقوم بتحليل الاساسات الى عواملها الاولية مثل $٢٥ = ٥^{٢}$ ، $٩ = ٣^{٢}$ ، $٤٠٥ = ٣^{٤} \times ٥$

المقدار $= \frac{(٥^{٢})^{٤ك-١} \times (٣^{٢})^{٢ك-٢}}{٥^{٧ك-١} \times (٣^{٤} \times ٥)^{ك-١}} = \frac{٥^{٨ك-٢} \times ٣^{٤ك-٤}}{٥^{٧ك-١} \times ٣^{٤ك-٤} \times ٥^{ك-١}}$



$= \text{٥}^{\text{٨ك - ٢ - ٧ك + ١ - ك + ١}} \times \text{٣}^{\text{٤ك - ٤ - ٤ك + ٤}} = \text{٥}^{\text{صفر}} \times \text{٣}^{\text{صفر}} = \text{١} \times \text{١} = \text{١}$

تدريب (١)

أوجد في ابسط صورة

$$\frac{\text{٩}^{\text{٤م+١}} \times \text{٤}^{\text{٢ - ٢م}}}{\text{٣}^{\text{٩م + ١}} \times \text{٤٨}^{\text{١ - م}}}$$

ملحوظة هامه :-

المعادلة $\text{س}^{\text{ن}} = \text{أ}$ حيث أ ∈ ح ، ن ∈ ص^{+} لها ن من الجذور

١) إذا كان ن عددا زوجيا ، أ > صفر فإن للمعادلة جذران حقيقيان هما $\sqrt[\text{ن}]{\text{أ}}$ ، $-\sqrt[\text{ن}]{\text{أ}}$ وباقي الجذور أعداد مركبة .

٢) إذا كان ن عددا زوجيا ، أ < صفر فإن المعادلة ليس لها جذور حقيقية (الجذور اعداد مركبة)

٣) إذا كان ن عددا فرديا ، أ ∈ ح - {٠} فإن المعادلة لها جذر حقيقي وحيد (باقى الجذور اعداد مركبة)

٤) إذا كان ن ∈ ص^{+} ، أ = صفر فإن المعادلة لها حل حقيقى وحيد وهو س = ٠ (الجذور مكررة وكل منها يساوى صفر عند ن > ١)

مثال (٢): أوجد فى ح مجموعة الحل لكل مما يلى:

١) $\text{س}^{\text{٤}} = \text{١٦}$	٢) $\text{س}^{\text{٥}} = \text{٢٤٣}$	٣) $\text{س}^{\text{٤}} = \text{-٨}$
الحل :	**الحل :**	**الحل :**
$\text{س}^{\text{٤}} = \text{١٦}$	$\text{س}^{\text{٥}} = \text{٢٤٣}$	$\text{س}^{\text{٤}} = \text{-٨}$
$\text{س}^{\text{٤}} = (\pm\text{٢})^{\text{٤}}$	$\text{س}^{\text{٥}} = \text{٣}^{\text{٥}}$	
مجموعة الحل = {-٢ ، ٢}	**مجموعة الحل** = {٣}	**مجموعة الحل** = ∅

تدريب (٢)

أوجد فى ح مجموعة الحل لكل مما يلى:

١) $\text{س}^{\text{٤}} = \text{٨١}$ ٢) $\text{س}^{\text{٣}} = \text{٢٧}$ ٣) $\text{س}^{\text{٢}} = \text{-١٦}$



الاسس الكسرية :

تعريف

١) لأى عدد حقيقى أ $\geqslant$ ٠ ، ن $\in$ ص$^+$ - {١} يكون $أ^{\frac{١}{ن}} = \sqrt[ن]{أ}$

هذه العلاقة صحيحة ايضا عندما أ $<$ ٠ ، ن عدد صحيح فردى اكبر من ١

٢) $أ^{\frac{م}{ن}} = \left(\sqrt[ن]{أ}\right)^م = \sqrt[ن]{أ^م}$ **حيث** أ $\in$ ح ، **م ، ن عددان صحيحيان ليس بينهما عامل مشترك ، ن $>$ ١ ،** $\sqrt[ن]{أ} \in$ ح

تعميم قوانين الأسس :- قوانين الأسس الكسرية تخضع لنفس قوانين الأسس الصحيحة

خواص الجذور النونية : إذا كان أ **، ب** عددين حقيقيين ، $\sqrt[ن]{أ} \in$ ح ، $\sqrt[ن]{ب} \in$ ح فإن:

١) $\sqrt[ن]{أ ب} = \sqrt[ن]{أ} \times \sqrt[ن]{ب}$

٢) $\sqrt[ن]{\frac{أ}{ب}} = \frac{\sqrt[ن]{أ}}{\sqrt[ن]{ب}}$ **: ب** $\neq$ ٠

مثال (٣): أوجد فى ح مجموعة حل كل من المعادلات الاتية

١) $\left(\sqrt[٥]{س^٢}\right) = ١٦$

الحل :

$س^{\frac{٢}{٥}} = ١٦$

$س = \pm (١٦)^{\frac{٥}{٢}}$ $\therefore$ س = $\pm$ ١٠٢٤ مجموعة الحل = { ـ ١٠٢٤، ١٠٢٤ }

٢) $س^{\frac{٤}{٣}} - ١٣ س^{\frac{٢}{٣}} + ٣٦ = ٠$

$(س^{\frac{٢}{٣}} - ٩) (س^{\frac{٢}{٣}} - ٤) = ٠$

$س^{\frac{٢}{٣}} = ٩$ أو $س^{\frac{٢}{٣}} = ٤$

$س = \pm ٩^{\frac{٣}{٢}}$ أو $س = \pm ٤^{\frac{٣}{٢}}$

$س = \pm ٢٧$ أو $س = \pm ٨$

مجموعة الحل = { ٢٧ ، ـ ٢٧ ، ٨ ، ـ٨ }

تدريب (٣)

أوجد فى ح مجموعة حل كل من المعادلات الاتية

١) $س^{\frac{٤}{٣}} = ٨١$

٢) $س^{\frac{٤}{٥}} - ٣ س^{\frac{٢}{٥}} - ٤ = ٠$

اجابة التدريبات

تدريب ١) ١

تدريب ٢)

١) {٣ ، ـ٣ }　　　٢) {٣}　　　٣) ∅

تدريب ٣)

١) {٢٧ ، ـ٢٧ }　　　٢) { ـ ٣٢، ٣٢ }



تمارين على الدرس الاول

أختر الاجابة الصحيحية من بين الاجابات المعطاة :

١) عدد الجذور الحقيقية للمعادلة $س^{٢} = -٢٥$ هى ....

أ) صفر ب) ٤ جـ) ٣ د) ٢

٢) إذا كان $٥^{س} = ٣$ فإن $٢٥^{س} =$ ....

أ) ٦ ب) ٩ جـ) ١٥ د) ٢٥

٣) إذا كان $س^{\frac{٣}{٢}} = ٦٤$ فإن س = ...

أ) ٥١٢ ب) ١٦ جـ) ٤ د) ٢

٤) إذا كان $٤ س^{٥} = ١٢٨$ فإن س = ...

أ) ٤ ب) ± ٢ جـ) ٢ د) -٢

٥) إذا كان $٣^{س+١} = ٥^{س+١}$ فإن $(٨)^{٢س+٢} =$ .....

أ) ١ ب) -١ جـ) ٣ د) ٥

٦) مجموعة حل المعادلة $٢^{س-١} + ٢^{س} = ٢٤$ فى ح هى ....

أ) ٢ ب) -٢ جـ) ٣ د) ٤

٧) مجموعة حل المعادلة $٣^{٢س} - ١٠(٣^{س}) + ٩ = ٠$ فى ح هى ....

أ) { ٢ } ب) { ٠ } جـ) { ٠ ، ٢ } د) { ١ ، ٩ }

٨) مجموع جذور المعادلة $س^{٤} = ١٦$ يساوى

أ) ٢ ب) ± ٢ جـ) -٢ د) صفر

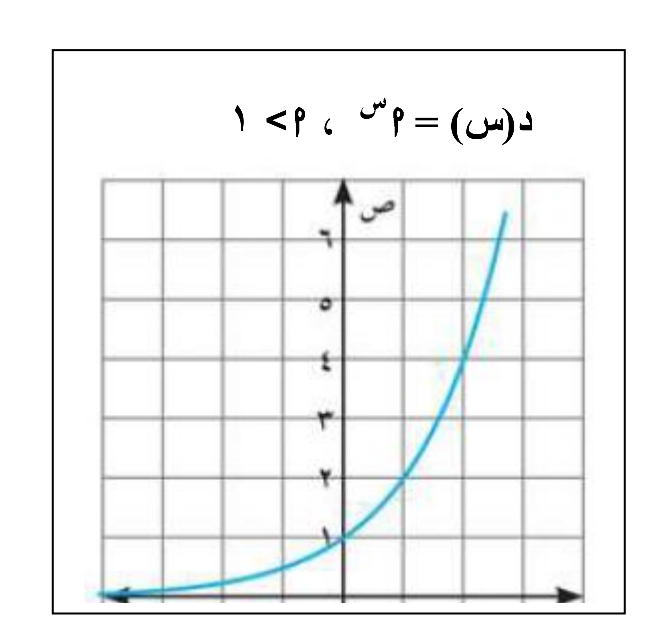
اجابات تمارين على الدرس الأول

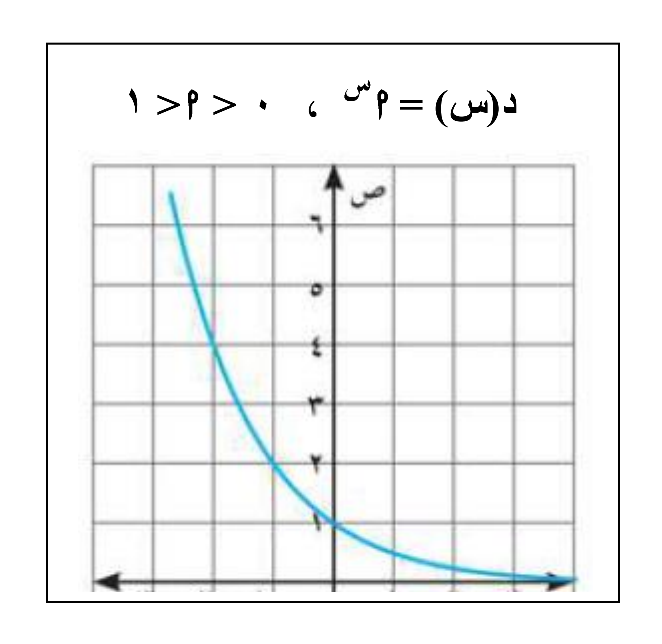
١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨
أ	ب	ب	جـ	أ	د	جـ	د

الدرس الثاني : الدالة الاسية وتطبيقاتها

المفاهيم الاساسية:

- الدالة د حيث د(س) = $م^{س}$ ، م > ٠ ، م ≠ ١ تسمى دالة أسية





ونلاحظ ان

- مجال الدالة الاسية د : د(س) = $م^{س}$ ، هو ح ومداها $ح^{+}$
- تكون الدالة تزايدية عندما م > ١ (شكل ١) ، تكون الدالة تناقصية عندما ٠ < م < ١ (شكل ٢)
- منحنى الدالة الاسية د : د(س) = $م^{س}$ يمر بالنقطة (٠ ، ١)
- الدالة الاسية دالة احادية و ليست فردية ولا زوجية
- منحنى الدالة د : د(س) = $م^{س}$ ، و منحنى الدالة د : د(س) = $م^{-س}$ كل منهما صورة للأخر بالإنعكاس في محور الصادات
- $\lim_{س \to \infty} م^{س} = \infty$ عندما م > ١ ، $\lim_{س \to \infty} م^{س} = ٠$ عندما ٠ < م < ١
- يمكن تطبيق التحويلات الهندسية التي تمت دراستها في الوحدة الاولى على الدالة الاسية

الامثلة

مثال ١ : اختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة.

أيا مما يلي يمثل دالة اسية

ﺃ د(س) = $(-٢)^{س}$ ب د(س) = $(١)^{س}$ ج د(س) = $(\sqrt{٢})^{س}$ د د(س) = $س^{٢}$

الحل

الاجابة ج لأنها الدالة الوحيدة التي تحقق شروط الدالة الاسية من بين الدوال المعطاه

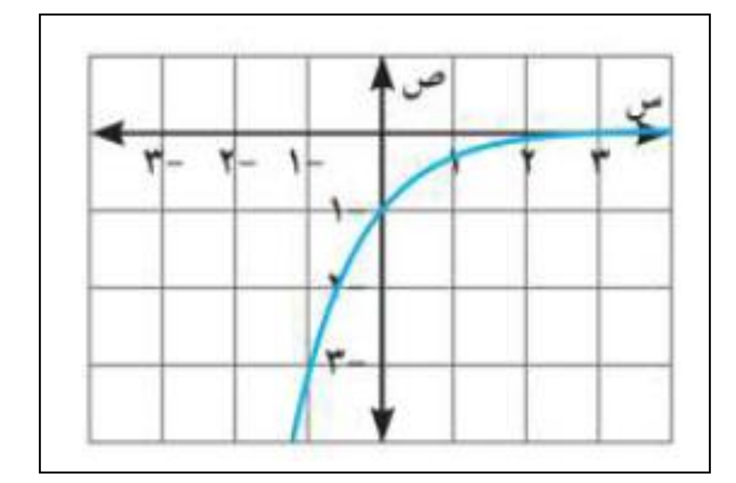
تذكر أن : شرط أن تكون الدالة د : د(س) = $ﺃ^{س}$ دالة أسية هو ﺃ > ٠ ، ﺃ ≠ ١

تدريب ١ : اختر الاجابة الصحيحة

أيا مما يلي يمثل دالة اسية

ﺃ د(س) = $(-١)^{س}$ ب د(س) = $(\frac{١}{٩})^{س}$ ج د(س) = $(١)^{س}$ د د(س) = $س^{٣}$

مثال ٢ :



المنحنى المرسوم في الشكل المقابل

يمثل منحنى الدالة ق ، والذي حصلنا

عليه من منحنى الدالة د : د(س) = $٣^{س}$

بعد إجراء بعض التحويلات الهندسية

على منحنى الدالة د

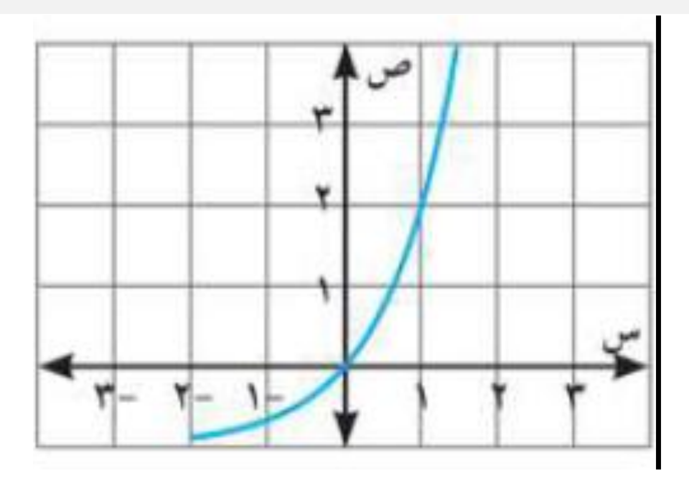
- أكتب قاعدة الدالة ق
- صف التحويلات الهندسية التي تمت على منحنى الدالة د للحصول على منحنى الدالة ق
- ابحث اطراد الدالة ق
- أوجد ق(٠) ،ق(٢) ، ق(-٢)



الحل

- قاعدة الدالة ق هي ق(س) = $-$ (٣) $^{-س}$
- حصلنا على منحنى الدالة ق من منحنى الدالة د بالانعكاس في محور السينات ثم الانعكاس في محور الصادات
- الدالة تزايدية على مجالها
- ق(٠) = $-$ ١ ، ق(٢) = $-$ (٣) $^{-٢}$ = $-\frac{١}{٩}$ ، ق($-$ ٢) = $-$ (٣) ^{٢} = $-$ ٩

تدريب ٢:

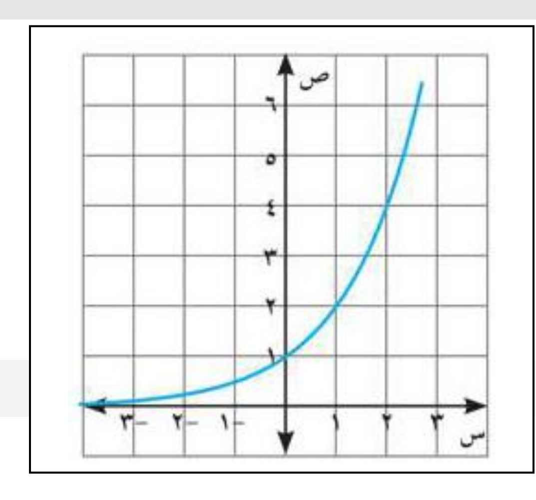


المنحنى المرسوم في الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة ق ، والذي حصلنا عليه من منحنى الدالة د : د(س) = ٢ ^{س}

بعد إجراء بعض التحويلات الهندسية على منحنى الدالة د

- أكتب قاعدة الدالة ق
- صف التحويلات الهندسية التي تمت على منحنى الدالة د للحصول على منحنى الدالة ق
- ابحث اطراد الدالة ق
- أوجد ق(٠) ،ق(٢) ، ق(-٢)

مثال ٣:



الشكل المقابل يمثل الشكل البياني للدالة د حيث د(س) = ٢ ^{س}

- قدر قيمة ص عندما س = -٢ ، س = ١,٥
- قدر قيمة س عندما ص = ٣

الحل

من الرسم عند رسم المستقيم س = -٢



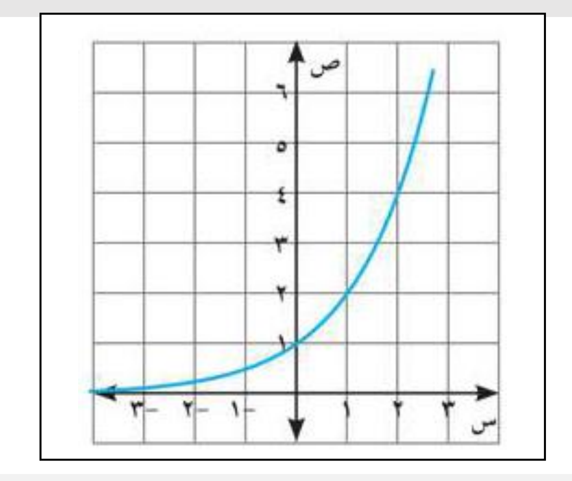
نجده يقطع منحنى الدالة عند ص = $\frac{١}{٤}$ ، بالمثل عند رسم المستقيم س = ١,٥ نجده يقطع منحنى الدالة عند ص = ٢,٨ تقريبا ، وعند رسم المستقيم ص= ٣ نجده يقطع منحنى الدالة عند س= ١,٦ تقريبا

تدريب٣ :

الشكل المقابل يمثل الشكل البياني

للدالة د حيث د(س) = ٢ ^{س}

- **قدر قيمة ص عندما س = -١**
- **قدر قيمة س عندما ص = ٦**



حلول التدريبات

تدريب (١)

(ب) د(س) = $(\frac{١}{٩})^{س}$

تدريب (٢)

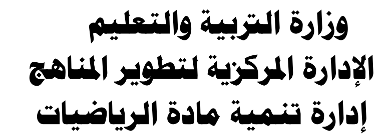
- قاعدة الدالة ق هي ق(س) = ٢ ^{س} ـ ١
- حصلنا على منحنى الدالة ق من منحنى الدالة د بإزاحة قدرها وحدة واحدة في اتجاه $\overleftarrow{وص/}$
- الدالة تزايدية على مجالها
- ق(٠) = ٠ ، ق(٢) = ٣ ، ق(ـ ٢) = ـ $\frac{٣}{٤}$

تدريب (٣)

ص = ٠,٥

س = ٢,٦ تقريبا





تمارين على الدرس الثاني

السؤال الاول : اختر الاجابة الصحيحة

١) إذا كانت الدالة د : د(س) = $أ^{س}$ تمثل دالة أسية فإن أ يمكن أن تساوي.......

(أ) صفر (ب) ١ (ج) ـ ١ (د) $\frac{٥}{٤}$

٢) إذا كانت الدالة د : د(س) = $أ^{س}$ تمثل دالة تناقصية فإن أ يمكن أن تساوي.......

(أ) $\frac{٨}{٩}$ (ب) ١ (ج) ـ ١ (د) $\frac{٥}{٤}$

٣) إذا كانت الدالة د : د(س) = $أ^{س}$ تمثل دالة تزايدية فإن أ يمكن أن تساوي.......

(أ) صفر (ب) ١ (ج) ـ ١ (د) ١,١

٤) إذا كان د(س) = $٢^{س}$ + ١ فإن : د(ـ ٢) = ...

(أ) ـ٣ (ب) $\frac{٥}{٤}$ (ج) $\frac{١}{٤}$ (د) $\frac{٤}{٥}$

٥) إذا كان د(س) = $٣^{س + ١}$ فإن د(س) = $\frac{١}{٩}$ عندما س = ...

(أ) صفر (ب) ـ ١ (ج) ـ ٢ (د) ـ ٣

٦) منحنى الدالة د(س) = $٢^{-س}$ هو صورة لمنحنى الدالة د(س) = $٢^{س}$ بالانعكاس في ....

(أ) محور السينات (ب) محور الصادات (ج) نقطة الاصل (د) المستقيم ص = س

٧) مدي الدالة د : د(س) = ٢ + $٣^{س}$ هو ....

(أ) ح (ب) $ح^{+}$ (ج)] ٥ ، ∞ [(د)] ٢ ، ∞ [



اجابة تمارين الدرس الثاني

١) د ٢) ⓟ ٣) د ٤) ب ٥) د

٦) ب ٧) د



الدرس الثالث: المعادلات الأسية

المفاهيم الاساسية للدرس:

إذا تضمنت المعادلة متغيرا فى الأس فإنها تسمى معادلة أسية مثل ($أ^{س}$ = ل)

أولا : إذاكان $أ^{م} = أ^{ن}$ حيث أ $\notin$ { ٠ ، ١ ، -١ } فإن م = ن

أمثلة محلول

مثال (١): أوجد فى ح مجموعة حل المعادلة $٥^{س+٢} = ٦٢٥$

الحل : $٥^{س+٢} = ٦٢٥$

$٥^{س+٢} = ٥^{٤}$

س + ٢ = ٤

س = ٢ مجموعة الحل = {٢}

تدريب (١) أوجد فى ح مجموعة حل المعادلة $٣^{س-٢} = ٨١$

مثال (٢): أوجد فى ح مجموعة حل المعادلة $(\sqrt{٣})^{س-١} = ٢٧$

الحل : $(\sqrt{٣})^{س-١} = ٢٧$

$(\sqrt{٣})^{س-١} = ٣^{٣}$

$(\sqrt{٣})^{س-١} = (\sqrt{٣})^{٦}$

س - ١ = ٦

س = ٧ مجموعة الحل = {٧}

تدريب (٢): أوجد فى ح مجموعة حل المعادلة $(\sqrt{٢})^{٢س-١} = ٤\sqrt{٢}$

مثال (٣): أوجد فى ح مجموعة حل المعادلة $٢^{س-١} = \frac{١}{١٦}$

الحل : $٢^{س - ١} = ٢^{- ٤}$ ∴ س - ١ = - ٤

∴ مجموعة الحل = {-٣}

تدريب (٣): أوجد فى ح مجموعة حل المعادلة $٣^{س + ١} = \frac{١}{٩}$

ثانيا : إذاكان $أ^{م} = ب^{م}$ حيث أ ∌ { ٠ ، ١ ، -١ } فإن

إما م = صفر

أو أ = ب عندما م عدد فردى ، أ = ± ب عندما م عدد زوجى

مثال (٤): أوجد فى ح مجموعة حل المعادلة $٥^{س+٣} = ٤^{س+٣}$

الحل : $٥^{س+٣} = ٤^{س+٣}$

س +٣ = ٠

س = -٣

مجموعة الحل = {-٣}

تدريب (٤) أوجد فى ح مجموعة حل المعادلة $٧^{س-٣} = ٩^{س-٣}$

مثال (٥): أوجد فى ح مجموعة حل المعادلة $٧^{س - ٤} = س^{س - ٤}$

الحل : $٧^{س - ٤} = س^{س - ٤}$

س = ٧ أو س-٤ = ٠ ∴ س = ٤

مجموعة الحل = { ٤ ، ٧ }



تدريب (٥): أوجد فى ح مجموعة حل المعادلة $س^{س-٥} = ٦^{س-٥}$

مثال (٦): أوجد فى ح مجموعة حل المعادلة $س^{٦} = ٦٤$

الحل : $س^{٦} = (\pm ٢)^{٦}$

$س = \pm ٢$

مجموعة الحل = {٢، -٢}

تدريب (٦): أوجد فى ح مجموعة حل المعادلة $(س+١)^{٣} = ٢٧$

مثال (٧): إذا كان د(س) = $٣^{س}$ فأوجد قيمه س التى تحقق د(س-١) + د(س +٢) = ٧٥٦

الحل : $٣^{س-١} + ٣^{س+٢} = ٧٥٦$

$٣^{س} \times ٣^{-١} + ٣^{س} \times ٣^{٢} = ٣^{س}(٣^{-١} + ٣^{٢}) = ٣^{س}\left(\frac{٢٨}{٣}\right) = ٧٥٦$

$٣^{س} = ٧٥٦ \times \frac{٣}{٢٨} = ٨١$

$٣^{س} = ٣^{٤}$ $\qquad$ $س = ٤$

تدريب (٧): إذا كان د(س) = $٣^{س}$ فأوجد قيمه س التى تحقق د(س+١) - د(س - ١) = ٧٢

مثال (٨): إذا كان د(س) = $٢^{س}$ فأوجد قيمه س التى تحقق د(س) + د(٥- س) = ١٢

الحل : $٢^{س} + ٢^{٥-س} = ١٢$

$٢^{س} + ٢^{٥} \times ٢^{-س} = ١٢$ $\qquad$ (بالضرب × $٢^{س}$)



$٢^{٢س} - ١٢ \times ٢^{س} + ٣٢ = ٠$

$٢^{س} = ٤$ أ، $٢^{س} = ٨$

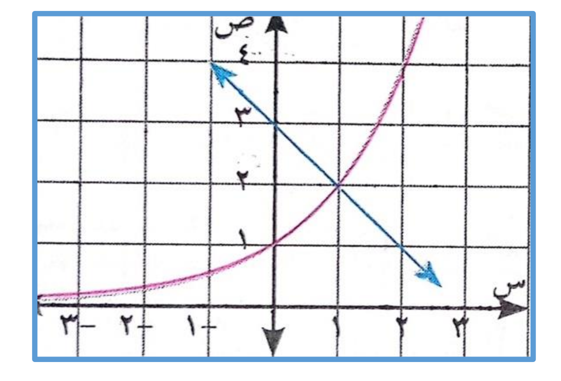
س = ٢ أ، س = ٣

تدريب (٨): إذا كان د(س) = $٣^{س}$ فأوجد قيمه س التى تحقق د(س+١) + د(٣ - س) = ٣٠.

حل المعادلات الأسية بيانيا

مثال (٩): إذا كان د$_{١}$(س) = $٢^{س}$ ، د$_{٢}$(س) = ٣ - س فأوجد قيمه س التى تحقق د$_{١}$(س) = د$_{٢}$(س)

الحل :



من رسم الشكل البيانى للدالتين نجد ان نقطه التقاطع

عند س = ١

تدريب (٩): إذا كان د$_{١}$(س) = $٢^{س}$ ، د$_{٢}$(س) = ٤ فأوجد بيانيا قيمه س التى تحقق د$_{١}$(س) = د$_{٢}$(س)

حلول التدريبات:

٩	٨	٧	٦	٥	٤	٣	٢	١
س=٢	س=٠ أ، ٢	س=٣	{٢}	{ ٥، ٦}	{٣}	{-٣}	{٣}	{٦}

تمارين على الدرس الثالث

اختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة.

١) إذا كان د(س) = ٢ ^س^ ، فإن مجموعة حل المعادلة د(س+١) = ٣٢ في ح هي ....

أ) { ٤ } ب) { ٣ } ج) { ٥ } د) { ١٦ }

٢) إذا كان د(س) = ٣ ^س^ ، فإن مجموعة حل المعادلة د(س+١) + د(س – ١)= ١٠ في ح هي ....

أ) { ٣ } ب) { ٢ } ج) { ١ } د) { ٠ }

٣) إذا كان ٤ ^س+٢^ = ٣ ^س+٢^ فإن س = ...

أ) ٢ ب) -٣ ج) -٢ د) ٣

٤) إذا كان $\left(\frac{٢}{٣}\right)^{س} = \frac{٢٤٣}{٣٢}$ فإن س = ...

أ) ٥ ب) - ٥ ج) ٤ د) -٤

٥) مجموعة حل المعادلة $٣^{|س+٤|}$ = ٨١ في ح هي ....

أ) { ٠ } ب) { -٨ } ج) {-٨ ، ٠ } د) { ٨ }

٦) مجموعة حل المعادلة $٧^{٢س - ٦}$ = ١ في ح هي ....

أ) { ٦ } ب) { ١ } ج) { -٣ } د) { ٣ }



٧) عدد جذور المعادلة $س^{٣} = ٤$ في ك (مجموعة الاعداد المركبة) هى ....

أ) ١ ب) ٢ ج) ٣ د) ٤

٨) مجموعة حل المعادلة $(س - ٣)^{\frac{٥}{٣}} = ٣٢$ فى ح هى ....

أ) {٢} ب) {١١} ج) {١١ ، -٥} د) {-١١ ، ١١}

٩) إذا كان $٣^{س} = ٢$ فإن $٢٧^{س} =$ ....

أ) ١٨ ب) ٨ ج) ٤ د) ١٦

١٠) إذا كان $٥^{س} = ٤$ فإن $٥^{س+٢} =$ ....

أ) ٢٠ ب) ٤٠ ج) ٨٠ د) ١٠٠

اجابة التمارين على الدرس الثالث

١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
أ	ج	ج	ب	ج	د	ج	ب	ب	د

الدرس الرابع: الدالة العكسية

المفاهيم الاساسية للدرس:

إذا كانت الدالة د دالة أحادية من مجموعة س إلى مجموعة ص ، فإن الدلة د$^{-1}$ تسمى دالة عكسية للدالة د من ص الى س إذا كان : لكل (س ، ص) ∈ د فإن (ص ، س) ∈ د$^{-1}$

أمثلة محلول

مثال (١): إذا كانت د دالة بيانها : د = { (١ ، ٢) ، (٢ ، ٤) ، (٣ ، ٦) ، (٤ ، ٨) }

أوجد الدالة العكسية للدالة د ومثلهما في شكل واحد ٠

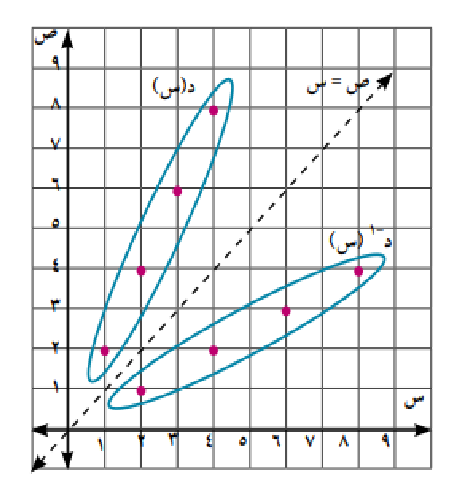
الحل :

∵ الدالة د دالة أحادية أي لها دالة عكسية



حيث د(س) ={ (١ ، ٢) ، (٢ ، ٤) ، (٣ ، ٦) ، (٤ ، ٨) }

د$^{-1}$(س) ={ (٢ ، ١) ، (٤ ، ٢) ، (٦ ، ٣) ، (٨ ، ٤) }



من الرسم نلاحظ أن:

د$^{-1}$(س) هي صورة د(س) بالانعكاس في المستقيم ص = س

تدريب (١) إذا كانت الدالة د ={ (١ ، ٤) ، (٢ ، -٣) ، (٣ ، ١) ، (٤ ، ٠) } أوجد د$^{-1}$

من خواص الدالة العكسية: اذا كان د(س)، ر(س) دالة عكسية للاخرى فإن:

(١) (د ٥ ر)(س) = س و (ر ٥ د)(س) = س

(٢) مجال د(س) = مدى ر(س) ، مدى د(س) = مجال ر(س)



مثال (٢): أوجد $د^{-١}$(س) حيث د(س) = ٢س + ٣

الحل : بتبديل المتغيرين س ، ص

س = ٢ص + ٣

٢ص = س – ٣

ص = $\frac{١}{٢}$ س - $\frac{٣}{٢}$

∴ $د^{-١}$(س) = $\frac{١}{٢}$ س - $\frac{٣}{٢}$

تدريب (٢): أوجد $د^{-١}$(س) حيث د(س) = ٥ – ٤س

مثال (٣): إذا كانت د(س) = $\sqrt{س - ٧}$ أوجد :

١) مجال ومدى الدالة د. ٢) أوجد $د^{-١}$(س) وعين مجال ومدى الدالة $د^{-١}$

الحل : مجال الدالة د = [٧، ∞ [، مدى الدالة د = [٠، ∞ [

نبدل قيمتى س ، ص س = $\sqrt{ص - ٧}$ (بتربيع الطرفين)

$س^٢$ = ص – ٧ ، ص = $س^٢$ + ٧ ، $د^{-١}$(س) = $س^٢$ + ٧

مدى الدالة $د^{-١}$ = [٧، ∞ [، مجال الدالة $د^{-١}$ = [٠، ∞ [

تدريب (٣) إذا كانت د(س) = $\sqrt{س - ٣}$ أوجد :

١) مجال ومدى الدالة د. ٢) أوجد $د^{-١}$(س) وعين مجال ومدى الدالة $د^{-١}$



ملحوظة:

إذا كانت د(س) = $\frac{١}{س - ك}$ + ك فإن الدالة العكسية للدالة د هي نفسها

مثال (٤): أوجد الدالة العكسية للدالة د(س) = $\frac{١}{س - ٢}$ + ٢

الحل : س = $\frac{١}{ص - ٢}$ + ٢ ∴ س – ٢ = $\frac{١}{ص - ٢}$

ص - ٢ = $\frac{١}{س - ٢}$ ∴ ص = $\frac{١}{س - ٢}$ + ٢

∴ $د^{-١}$(س) = $\frac{١}{س - ٢}$ + ٢

تدريب (٤) أوجد الدالة العكسية للدالة د(س) = $\frac{١}{س - ٥}$ + ٥

مثال (٥): أوجد الدالة العكسية للدالة : د(س) = $(س - ٢)^{٢}$ + ٣ حيث س ≥ ٢

الحل : س = $(ص - ٢)^{٢}$ + ٣ ، س ≥ ٣ ، ص ≥ ٢

$(ص - ٢)^{٢}$ = س – ٣ ، ص ≥ ٢

ص – ٢ = ± $\sqrt{س - ٣}$ ∵ ص ≥ ٢

∴ ص – ٢ = $\sqrt{س - ٣}$ ∴ ص = $\sqrt{س - ٣}$ + ٢

∴ $د^{-١}$ (س) = $\sqrt{س - ٣}$ + ٢ حيث س ≥ ٣ ، ص ≥ ٢

تدريب (٥): أوجد الدالة العكسية للدالة : د(س) = $(س - ٣)^{٢}$ + ٢ ، س ≥ ٣

مثال (٦): إذا كان د(س) = $\frac{١}{س - ٢}$ + ٣ أوجد $د^{-١}$ (س) مبينا مجال ومدى $د^{-١}$

الحل : نقطة تماثل د(س) هي (٢ ، ٣)



مجال د(س) = ح - { ٢ } ، مدى د(س) = ح - { ٣ }

∴ مجال $د^{-1}$(س) = ح - { ٣ } ، مدى $د^{-1}$(س) = ح - { ٢ }

$د^{-1}(س) = \frac{١}{س - ٣} + ٢$

تدريب (٦): إذا كان د(س) = $\frac{١}{س - ٣}$ أوجد $د^{-1}$(س) مبينا مجال ومدى $د^{-1}$

حلول التدريبات:

١) { (٤ ، ١) ، (-٣ ، ٢) ، (١ ، ٣) ، (٠ ، ٤) }

٢) $د^{-1}(س) = \frac{٥ - س}{٤}$

٣) مجال الدالة د = [٣، ∞ [، مدى الدالة د = [٠، ∞ [

$د^{-1}(س) = س^{٢} + ٧$

مدى الدالة $د^{-1}$ = [٣، ∞ [، مجال الدالة $د^{-1}$ = [٠، ∞ [

٤) $د^{-1}(س) = \frac{١}{س - ٥} + ٥$

٥) $د^{-1}(س) = \sqrt{س - ٢} + ٣$ ، ص ≥ ٣

٦) $د^{-1}(س) = \frac{١}{س} + ٣$ المجال = ح - { ٠ } ، المدى = ح – { ٣ }



تمارين على الدرس الثالث

اختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

١) إذا كانت د = { (٠ ، ٥) ، (٢ ، -٣) ، (٣ ، ١) ، (٦ ، ٤)}

فإن $د^{-1}$(١) + د (٢) = ...

(أ) - ١ (ب) ١ (ج) صفر (د) ٣

٢) إذا كان $د^{-1}$ ={ (٤ ، ٥) ، (أ ، ٢)} ، د = { (٢ ، ٣) ، (٥ ، ب) } فإن : أ + ب =..........

(أ) ٧ (ب) ١ (ج) -١ (د) صفر

٣) إذا كان د(س) = س +٣ فإن $د^{-1}$(س) =...........

(أ) ص = س + ٣ (ب) ص = س - ٣ (ج) ص = ٣س (د) ص=٣- س

٤) صورة النقطة (-٥ ، ٢) بالانعكاس في المستقيم ص = س هي ......

(أ) (٥ ، -٢) (ب) (-٥ ، ٢) (ج) (٢ ، ٥) (د) (٢ ، -٥)

٥) إذا تقاطع منحنى الدالة د مع منحنى الدالة $د^{-1}$ في النقطة (٢ أ ، ٣ أ - ٢) فإن أ = ...

(أ) ٢ (ب) ٣ (ج) ٥ (د) ٦

٦) إذا كانت د(س) = س٣ +٢٣ فإن : $د^{-1}$(-٤) = ...

(أ) ٦ (ب) ١ (ج) -٣ (د) ٣

٧) إذا كانت د(س) = ٥ + $\sqrt{\text{س} - ٤}$ فإن مدى د$^{-١}$ هو .....

(أ)] ∞ ، ٤] (ب)] ∞ ، ٢ [(ج) [٤ ، ∞- [(د)] ∞ ، ٤ [

٨) إذا كانت د:د(س) = ٣س + ب هي دالة عكسية للدالة ر : ر(س) = أ س + ٣

فإن أ × ب = ...

(أ) ٢ (ب) -٣ (ج) ١١ (د) ١١

اجابة التمارين على الدرس الرابع

١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨
جـ	أ	ب	د	أ	جـ	أ	ب



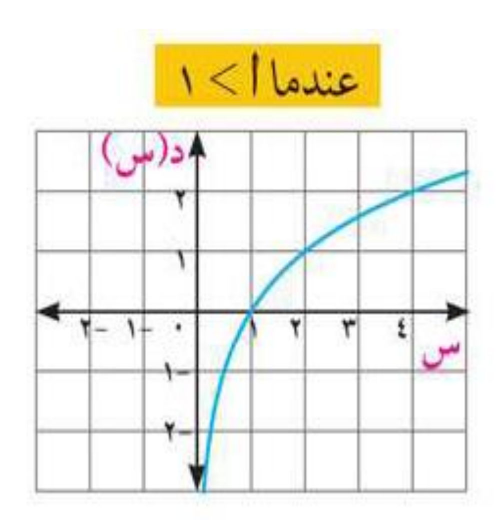
الدرس الخامس : الدالة اللوغاريتمية وتمثيلها البياني

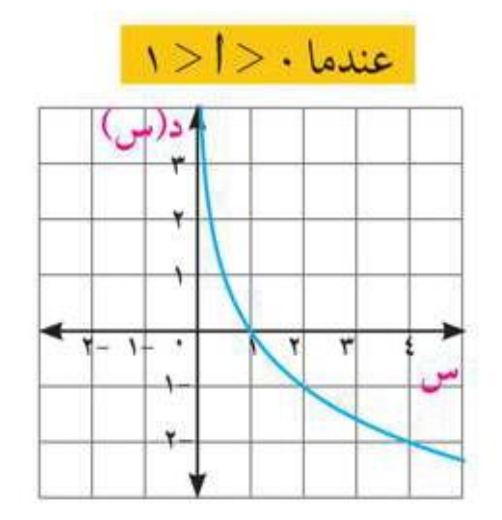
المفاهيم الاساسية:

- الدالة اللوغاريتمية هي الدالة العكسية للدالة الأسية .
- الصورة العامة للدالة اللوغاريتمية هي د حيث د: $ع^+$ ← ع ، د(س) = لو$_{م}$ س ، م ∈ $ع^+$ - { ١ }
- مجال الدالة اللوغاريتمية هو $ع^+$ بينما مداها ح
- يمكن التحويل بين الصورة الاسية والصورة اللوغاريتمية فإذا كان

  س = $م^{ص}$ فإن ص = لو$_{م}$ س

- التمثيل البياني للدالة اللوغاريتمية
- تمثل الدالة اللوغاريتمية د : د(س) = لو$_{م}$ س ، م ∈ $ع^+$ - { ١ } بيانيا كما في الاشكال التالية



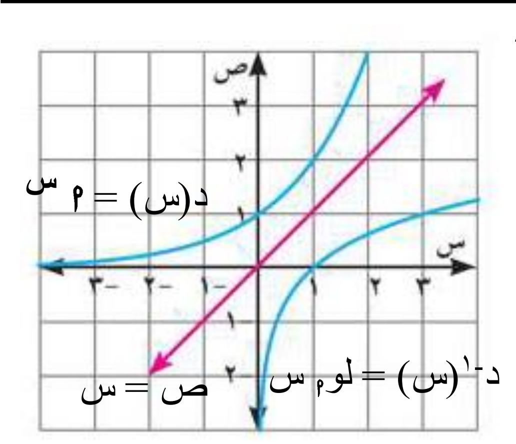


ونلاحظ أن منحنى الدالة اللوغاريتمية يقطع محور السينات في النقطة (١ ، ٠) ، و أن الدالة تزايدية عندما م > ١ ، وتناقصية عندما ٠ < م < ١



نلاحظ ايضا أن منحنى الدالة الاسية ومنحنى الدالة اللوغاريتمية

كل منهما صورة للأخر بالاتعكاس في المستقيم ص = س



اللوغاريتمات المعتادة

إذا كان أساس اللوغاريتم ١٠ يسمى بالوغاريتم المعتاد ويكتب اللوغاريتم بدون أساس ويفهم ضمنيا

بأن الاساس ١٠ فمثلا لو ٥ تعني $لو_{١٠}$ ٥

الامثلة

مثال ١ :

حول من الصورة الاسية الى الصورة اللوغاريتمية

ⓜ $٣^{٢} = ٩$ ⓑ $٢^{٥} = ٣٢$ ⓙ $١٠^{٢} = ١٠٠$

الحل

ⓜ $٣^{٢} = ٩ \Longleftarrow لو_{٣} ٩ = ٢$

ⓑ $٢^{٥} = ٣٢ \Longleftarrow لو_{٢} ٣٢ = ٥$

ⓙ $١٠^{٢} = ١٠٠ \Longleftarrow لو ١٠٠ = ٢$

تدريب ١ :

حول من الصورة الاسية الى الصورة اللوغاريتمية

ⓜ $٥^{٤} = ٦٢٥$ ⓑ $٤^{٣} = ٦٤$ ⓙ $١٠^{٣} = ١٠٠٠$



مثال ٢ :

حول من الصورة اللوغاريتمية الى الصورة الاسية

(أ) $لو_٥ ١ = ٠$ (ب) $لو_٢ \frac{١}{٤} = -٢$ (ج) $لو_٣ ٨١ = ٤$

الحل

(أ) $لو_٥ ١ = ٠ \Leftarrow ٥^٠ = ١$

(ب) $لو_٢ \frac{١}{٤} = -٢ \Leftarrow ٢^{-٢} = \frac{١}{٤}$

(ج) $لو_٣ ٨١ = ٤ \Leftarrow ٣^٤ = ٨١$

تدريب ٢ :

حول من الصورة اللوغاريتمية الى الصورة الاسية

(أ) $لو_٥ ٥ = ١$ (ب) $لو_٣ \frac{١}{٣} = -١$ (ج) $لو_٢ ١٢٨ = ٧$

مثال ٣:

أوجد في ع مجموعة حل كل من المعادلات الآتية:

(أ) $لو_٥ (س+٢) = ٣$ (ب) $لو_س (س + ١٢) = ٢$ (ج) $لو_٣ ٢٧ = س$

الحل

(أ) $لو_٥ (س+٢) = ٣$

المعادلة معرفة لقيم س التي تحقق س + ٢ > ٠ أي س > -٢ (مجال تعريف المتغير)

$\because لو_٥ (س+٢) = ٣ \Leftarrow ٥^٣ = س+٢ \Leftarrow ١٢٥ = س + ٢$

$\Leftarrow س = ١٢٣ \in$ مجال تعريف المتغير

$\therefore$ مجموعة الحل = {١٢٣}

(ب) لو$_{س}$ (س + ١٢) = ٢

المعادلة معرفة لقيم س التي تحقق س + ١٢ > ٠ ⟸ س > ـ ١٢ (١)

س > ٠ ، س ≠ ١ (٢)

من (١) ، (٢) س ∈ ح$^{+}$ - {١} (مجال تعريف المتغير)

∵ لو$_{س}$ (س + ١٢) = ٢ ⟸ س^{٢} = س+١٢ ⟸ س^{٢} ـ س ـ ١٢ = ٠

(س ـ ٤)(س + ٣) = ٠

⟸ س = ٤ ∈ مجال تعريف المتغير ، س = ـ ٣ ∉ مجال تعريف المتغير

∴ مجموعة الحل= {٤}

(جـ) لو$_{٣}$ ٢٧ = س (مجال تعريف المتغير هو ح)

∵ لو$_{٣}$ ٢٧ = س ⟸ ٢٧ = ٣^{س} ⟸ ٣^{٣} = ٣^{س}

⟸ س = ٣ ∈ مجال تعريف المتغير ∴ مجموعة الحل = {٣}

تدريب ٣:

أوجد في ح مجموعة حل كل من المعادلات الآتية:

(أ) لو$_{٤}$ (س ـ ١) = ٢ (ب) لو$_{س}$ (٢س + ٨) = ٢ (جـ) لو$_{٢}$ ٨ = س

حلول التدريبات

تدريب (١)

(أ) لو$_{٥}$ ٦٢٥ = ٤ (ب) لو$_{٤}$ ٦٤ = ٣ (جـ) لو ١٠٠٠ = ٣

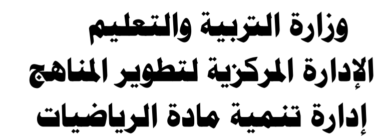
تدريب (٢)

(أ) ٥^{١} = ٥ (ب) ٣$^{-١}$ = $\frac{١}{٣}$ (جـ) ٢^{٧} = ١٢٨

تدريب (٣)

(أ) مجموعة الحل = {١٧} (ب) مجموعة الحل = {٤} (جـ) مجموعة الحل = {٣}





تمارين على الدرس الخامس

السؤال الاول : اختر الاجابة الصحيحة

١) إذا كان أ$^{\text{ب}}$ = جـ فإن ....

(أ) لو$_{\text{أ}}$ ب = جـ (ب) لو$_{\text{أ}}$ جـ = ب (جـ) لو$_{\text{ب}}$ جـ = أ (د) لو$_{\text{جـ}}$ ب = أ

٢) المعادلة الاسية س^{٣} = ١٢٥ يمكن التعبير عنها بالصورة اللوغارتمية ....

(أ) لو$_{\text{س}}$ ١٢٥ = ٣ (ب) لو$_{\text{س}}$ ٣ = ١٢٥ (جـ) لو$_{٣}$ ١٢٥ = س (د) لو$_{٣}$ س = ١٢٥

٣) إذا كان لو$_{٢}$ (س − ١) = ٤ فإن س = ...

(أ) ٥ (ب) ١٠ (جـ) ١٥ (د) ١٧

٤) إذا كان منحنى الدالة د(س) = لو$_{٢}$ (٣س + ١) يمر بالنقطة (ك ، ٤) فإن ك =.....

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٥

٥) مجموعة حل المعادلة لو$_{\text{س}}$ (٢س+١٥) = ٢ هي.......

(أ) {٣ ، ٥} (ب) {٥ ، −٣} (جـ) {٥} (د) {٣}

٦) مجموعة حل المعادلة لو$_{٣}$ (٥س − ٦) = ٢ هي.......

(أ) {٤} (ب) {٣} (جـ) {٩} (د) {٦}

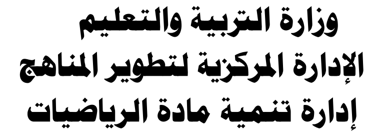
٧) مجموعة حل المعادلة لو$_{٥}$ ٦٢٥ = س هي.......

(أ) {٢٥} (ب) {٥} (جـ) {٤} (د) {٣}

اجابة تمارين الدرس الخامس

١) ب ٢) ⓐ ٣) د ٤) د ٥) جـ

٦) ب ٧) جـ





الدرس السادس : بعض خواص الدالة اللوغاريتمية

المفاهيم الاساسية:

١) $\text{لو}_{\text{أ}}\,\text{أ} = ١$ ، $\text{لو}_{\text{أ}}\,١ = \text{صفر}$ حيث $\text{أ} \in \text{ع}^{+} - \{١\}$

٢) $\text{لو}_{\text{أ}}(\text{س ص}) = \text{لو}_{\text{أ}}\,\text{س} + \text{لو}_{\text{أ}}\,\text{ص}$ حيث $\text{أ} \in \text{ع}^{+} - \{١\}$ ، $\text{س} \in \text{ع}^{+}$ ، $\text{ص} \in \text{ع}^{+}$

٣) $\text{لو}_{\text{أ}}\left(\frac{\text{س}}{\text{ص}}\right) = \text{لو}_{\text{أ}}\,\text{س} - \text{لو}_{\text{أ}}\,\text{ص}$ حيث $\text{أ} \in \text{ع}^{+} - \{١\}$ ، $\text{س} \in \text{ع}^{+}$ ، $\text{ص} \in \text{ع}^{+}$

٤) $\text{لو}_{\text{أ}}\,\text{س}^{\text{ن}} = \text{ن}\ \text{لو}_{\text{أ}}\,\text{س}$ حيث $\text{أ} \in \text{ع}^{+} - \{١\}$ ، $\text{س} \in \text{ع}^{+}$ ، $\text{ن} \in \text{ع}$

٥) $\text{لو}_{\text{س}}\,\text{ص} = \frac{\text{لو}_{\text{أ}}\,\text{ص}}{\text{لو}_{\text{أ}}\,\text{س}}$ حيث $\text{س} \in \text{ع}^{+} - \{١\}$ ، $\text{أ} \in \text{ع}^{+} - \{١\}$ ، $\text{ص} \in \text{ع}^{+}$

٦) $\text{لو}_{\text{س}}\,\text{ص} = \frac{١}{\text{لو}_{\text{ص}}\,\text{س}}$ حيث $\text{س} \in \text{ع}^{+}$ ، $\text{ص} \in \text{ع}^{+} - \{١\}$

٧) $\text{لو}_{\text{أ}}\,\text{س} = \text{لو}_{\text{أ}}\,\text{ص} \Longleftarrow \text{س} = \text{ص}$ حيث $\text{أ} \in \text{ع}^{+} - \{١\}$ ، $\text{س} \in \text{ع}^{+}$ ، $\text{ص} \in \text{ع}^{+}$

٨) $\text{لو}_{\text{أ}}\,\text{س} = \text{ص} \Longleftarrow \text{س} = \text{أ}^{\text{ص}}$ حيث $\text{أ} \in \text{ع}^{+} - \{١\}$ ، $\text{س} \in \text{ع}^{+}$ ، $\text{ص} \in \text{ع}$



الامثلة

مثال ١ : بإستخدام خواص اللوغاريتمات ضع المقدار الاتي في صورة لوغاريتم واحد فقط

٣ لو س + $\frac{١}{٢}$ لو ص ـ ٢ لو ع

الحل

٣ لو س + $\frac{١}{٢}$ لو ص ـ ٢ لو ع = لو س^{٣} + لو ص$^{\frac{١}{٢}}$ ـ لو ع^{٢}

= لو(س^{٣} ص$^{\frac{١}{٢}}$) ـ لو ع^{٢}

= لو $\frac{س^{٣}\sqrt{ص}}{ع^{٢}}$

تدريب ١ : بإستخدام خواص اللوغاريتمات ضع المقدار الاتي في صورة لوغاريتم واحد فقط

٥ لو س + لو ص ـ ٣ لو ع

مثال ٢ : بإستخدام خواص اللوغاريتمات ضع المقدار الاتي في صورة مجموع وفرق لوغاريتمات

لو $\frac{١٠ س^{٤}}{ص ع^{٢}}$

الحل

لو $\frac{١٠ س^{٤}}{ص ع^{٢}}$ = لو ١٠ + لو س^{٤} ـ لو (ص ع^{٢})

= ١ + ٤ لو|س| ـ (لو ص + لو ع^{٢})

= ١ + ٤ لو|س| ـ لو ص ـ ٢ لو |ع|

تدريب ٢ : بإستخدام خواص اللوغاريتمات ضع المقدار الاتي في صورة مجموع وفرق لوغاريتمات

لو $\frac{١٠٠ س^{٣} ص^{٢}}{ع}$

مثال ٣ : أوجد في ح مجموعة حل المعادلة :

لو$_{٢}$ (س+١) ـ لو$_{٢}$ (س ـ ١) = لو$_{٢}$ ٣

الحل:

مجال تعريف المتغير س + ١ > ٠ ، س ـ ١ > ٠

⟸ س > ـ ١ ، س > ١ ⟸ س > ١ أي س ∈] ١ ، ∞ [

لو$_{٢}$ (س+١) ـ لو$_{٢}$ (س ـ ١) = لو$_{٢}$ ٣ ⟸ لو$_{٢}$ ($\frac{\text{س + ١}}{\text{س ـ ١}}$) = لو$_{٢}$ ٣

⟸ ٣ = $\frac{\text{س + ١}}{\text{س ـ ١}}$ ⟸ س + ١ = ٣ س ـ ٣

٢ س = ٤ ⟸ س = ٢ ∴ مجموعة الحل = { ٢ }

تدريب ٣ : أوجد في ح مجموعة حل المعادلة :

لو$_{٥}$ (س+٢) ـ لو$_{٥}$ (س ـ ٢) = لو$_{٥}$ ٣

مثال ٤ : أوجد في ح مجموعة حل المعادلة :

لو$_{٢}$ (س+١) ـ لو$_{٢}$ (س ـ ١) = ٣

الحل:

مجال تعريف المتغير س + ١ > ٠ ، س ـ ١ > ٠

⟸ س > ـ ١ ، س > ١ ⟸ س > ١ أي س ∈] ١ ، ∞ [

لو$_{٢}$ (س+١) ـ لو$_{٢}$ (س ـ ١) = ٣ ⟸ لو$_{٢}$ ($\frac{\text{س + ١}}{\text{س ـ ١}}$) = ٣

⟸ ٢^{٣} = ٨ = $\frac{\text{س + ١}}{\text{س ـ ١}}$ ⟸ س + ١ = ٨ س ـ ٨

٧ س = ٩ ⟸ س = $\frac{٩}{٧}$ ∴ مجموعة الحل = { $\frac{٩}{٧}$ }



تدريب ٤ : أوجد في ح مجموعة حل المعادلة :

لو ٢ س ـ لو ٢ (س ـ ١) = ١

مثال ٥ : أوجد في ح مجموعة حل المعادلة :

لو ٢ س + لو ٢ (س ـ ١) = لو ٢ ٦

الحل

مجال تعريف المتغير س > ٠ ، س ـ ١ > ٠ ⟸ س > ١ أي س ∈] ١ ، ∞ [

لو ٢ س + لو ٢ (س ـ ١) = لو ٢ ٦ ⟸ لو ٢ [س (س ـ ١)] = لو ٢ ٦

⟸ س (س ـ ١) = ٦ ⟸ س^{٢} ـ س ـ ٦ = ٠ ⟸ (س +٢) (س ـ ٣) = ٠

⟸ س = ـ ٢ مرفوض ∉] ١ ، ∞ [

أو س = ٣ مقبول ∴ مجموعة الحل = { ٣ }

تدريب ٥ : أوجد في ح مجموعة حل المعادلة :

لو ٣ س + لو ٣ (س + ٢) = لو ٣ ٨

حلول التدريبات

تدريب (١) لو $\left(\frac{س^{٥} ص}{ع^{٣}}\right)$

تدريب (٢) ٢ +٣ لو س + ٢ لو|ص| ـ لو ع

تدريب (٣) مجموعة الحل = { ٤ }

تدريب (٤) مجموعة الحل = {٢ }

تدريب (٥) مجموعة الحل = {٢ }



تمارين على الدرس السادس

السؤال الاول : اختر الاجابة الصحيحة

١) إذا كان لو (س ــ ٥) = ٠ فإن س = ...

(أ) ٠ (ب) ١ (ج) ٥ (د) ٦

٢) مجموعة حل المعادلة لو (س+٣) = ١ هي...............

(أ) { ٠ } (ب) { -٣ } (ج) { ٤ } (د) { ٧ }

٣) لو ($\frac{س^3}{ص}$) = ...

(أ) ٣(لو س ـ لو ص) (ب) ٣(لو س + لو ص)

(ج) ٣ لو س ـ لو ص (د) ٣ لو س + لو ص

٤) مجموعة حل المعادلة $لو_{٩}$ $س^2$ = ١ هي...............

(أ) { ٩ } (ب) { ٣ } (ج) { ٣، -٣ } (د) { ٠ }

٥) مجموعة حل المعادلة $لو_{٢}$ (س+٣) ـ $لو_{٢}$ (س ـ ٥) = $لو_{٢}$ ٣ في ح هي ....

(أ) { ٩ } (ب) { ٨ } (ج) { ٦ } (د) { ٣ }

٦) مجموعة حل المعادلة $لو_{٢}$ (س+٣) + $لو_{٢}$ (س ـ ٥) = $لو_{٢}$ ٩ في ح هي ....

(أ) { ٩ } (ب) { ٨ } (ج) { ٦ } (د) { ٣ }

اجابة تمارين الدرس السادس

١) د ٢) د ٣) جـ ٤) جـ ٥) ﺃ ٦) جـ



تمارين على الوحدة الثانية :الأسس واللوغاريتمات وتطبيقات عليها

اختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات

١) إذا كان د(س) = ٢ ^س^ ، فإن مجموعة حل المعادلة د(س+١) = ١٦ هى ....

(أ) { ٤ }　　(ب) { ٣ }　　(ج) { ١٥ }　　(د) { ٨ }

٢) إذا كان د(س) = ٣ ^س^ ، فإن مجموعة حل المعادلة د(س+١) – د(س – ١)= ٢٤ هى ....

(أ) { ٢ }　　(ب) { ٣ }　　(ج) { ٠ }　　(د) { ٨ }

٣) إذا كان ٤ س ^٥^ = ١٢٨ فإن س =........

(أ) ٤　　(ب) ± ٢　　(ج) ٢　　(د) -٢

٤) إذا كان ٢ ^س^ = ٣ ، ٣ ^ص^ = ٨ ، فإن ٣ ^س ص^ = ...

(أ) ٣　　(ب) ٨　　(ج) ٢٤　　(د) ٢٧

٥) إذا كان د(س-١) = ٣ ^س+١^ ، فإن د(س) = ...

(أ) ٣ ^س^　　(ب) ٣ ^س - ١^　　(ج) ٣ ^س +١^　　(د) ٣ ^س +٢^

٦) الدالة الأسية التى أساسها أ تكون تناقصية إذا كان ....

(أ) أ> ٠　　(ب) أ< ٠　　(ج) ١> أ > ٠　　(د) ٠> أ >-١



٧) إذا كان د(٨) = ٣ ، فإن $د^{-1}$ (٣) = ...

ﺃ) ٣ ب) ٨ ج) ٢٤ د) ٥

---

٨) إذا كان د(س) = $س^{٣}$ +٦، فإن $د^{-1}$(-٢) = ...

ﺃ) ١ ب) ٢ ج) -٢ د) -٨

٩) أى من الدوال الاتيه لها دالة عكسية

ﺃ) ص = $س^{٢}$ ب) ص = | س | ج) ص = $(س-٢)^{٢}$ د) ص = $س^{٣}$

١٠) إذا كان (ﺃ ، ب) ∈ د(س) فإن .... ∈ $د^{-1}$(س)

ﺃ) (ﺃ ، - ب) ب) (ب، ﺃ) ج) (-ﺃ ، -ب) د) (-ب، -ﺃ)

١١) إذا كان $لو_{٤}$ س =٢ ، فإن س = ...

ﺃ) ٢ ب) ٤ ج) ٨ د) ١٦

١٢) إذا كان $لو_{٥}$ (س+١١) =٢ ، فإن س = ...

ﺃ) -١ ب) ٢١ ج) ١٤ د) ٣٦

١٣) إذا كان $لو_{٢}$ $لو_{٥}$ $لو_{٢}$س=٠ ، فإن س = ...

ﺃ) ٤ ب) ٨ ج) ١٦ د) ٣٢



١٤) لوه ٣ + ٣ لوه ٢ = ...

Ⓐ لوه ٢٤   Ⓑ لوه ١٢   Ⓒ لوه ١٨   د) لو ٢٤

١٥) إذا كان $٣^{س}$ = ٧ ، فإن س = ...

Ⓐ $لو_{٣}$ ٧   Ⓑ $لو_{٧}$ ٣   Ⓒ لو ٣   د) لو ٧

اجابة التمارين على الوحدة الثانية

١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨
ب	أ	ج	د	د	ج	ب	ج
٩	١٠	١١	١٢	١٣	١٤	١٥	
د	ب	د	ج	د	أ	أ	



الاختبار الأول على الوحدة الثانية

اختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة.

١) إذا كان لو$_{ص}$ س + لو$_{ص}$ ٣ = لو$_{ص}$ ٢٧ - ١ ، فأى مما يأتى يعبر عن س بدلالة ص ....

ﺃ) س = ٩ص ب) س = $\frac{٩}{ص}$ ج) س = $\frac{ص}{٩}$ د) س = $\frac{١}{ص}$

٢) مجموعة حل المعادلة لو$_{٢}$ س - $\frac{٣}{لو_{٢} س}$ = ٢ هى ....

ﺃ) { -١، ٣ } ب) { ٨ ، ٠٫٥ } ج) { ٨ ، ٢ } د) {٠٫١٢٥، ٢ }

٣) إذا كان د(س - ١) = ٢ $^{س-٥}$ ، د(س +٣) = $\frac{١}{٣٢}$ فإن س = ...

ﺃ) - ٤ ب) - ٢ ج) ٤ د) ٦

٤) مجموعة حل المعادلة لو$_{س}$(٢- س) = ٢ فى ح هى ....

ﺃ) { ١ ، -٢ } ب) { ١ } ج) { -٢ } د) $\varnothing$

٥) مجموعة حل المعادلة $\sqrt[٣]{(س-١)}^{٥}$ = ٣٢ فى ح هى ....

ﺃ) { ٨ } ب) { $\frac{١}{٨}$ } ج) { ٩ } د) { -٩ }

٦) الدالة الأسية التى أساسها ﺃ تكون تزايدية على مجالها إذا كان ....

ﺃ) ﺃ > ٠ ب) ﺃ > ١ ج) ٠ < ﺃ < ١ د) ﺃ = ١

٧) إذا كانت د(س) = ٣^{س}، فإن د(س+٢) × د(س – ٢)= ....

ﺃ) د(٢س) ب) د(س) ج) د(٣س) د) ٢ د(س)



٨) مجموعة حل المعادلة $لو_٢ (٤^{س} - ٢) = س$ هى .... حيث س ∈ ح

(أ) {-١ ، ٢} (ب) {١} (جـ) {-١} (د) ∅

الاسئلة المقالية

١) إذا كانت $د_١(س) = ٣^{س}$ ، $د_٢(س) = ٩^{س}$ فأوجد قيمة س التى تحقق $د_١(٢س-١) + د_٢(س+١) = ٧٥٦$

٢) أوجد في ح مجموعة حل المعادلة $لو_٨(س - ٢) + لو_٢(س - ٢) = ٤$

حل الامتحان الأول على الوحدة الثانية

١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨
ب	ب	أ	د	جـ	ب	أ	ب

١) س = ٢ ٢) {١٠}



الاختبار الثانى على الوحدة الثانية

١) مجال الدالة د(س) = لو$_{١-س}$ ٣ هو ....

أ)]-∞،٠[ب)]١، ∞[ج)]-∞،١[– {٠} د)]٠،١[

٢) إذا كان ٢$^{س-١}$ = ٨$^{س-١}$ فإن ٦$^{س-١}$ = ...

أ) ٢ ب) ٧ ج) ١ د) ٠

٣) إذا كان كل من د(س) = ٢س+م ، ر(س) = ب س + ٣ دالتين كل منهما دالةعكسية للاخرى فإن

م ب = ...

أ) ٣ ب) -٣ ج) -١,٥ د) ٦

٤) إذا كان ٣^{ب} = ٢٥ ، ٥^{أ} = ٢٧ فإن أ ب = ...

أ) ١٠ ب) ٦ ج) ١٢ د) ١٥

٥) إذا كان لو$_{٩}$س × لو$_{٥}$ ٨ × لو$_{١١}$ ٣ × لو$_{٢}$ ٢٥ = ٣ فإن س =........

أ) ٩ ب) ١١ ج) ٥ د) ٢

٦) لو$_{س ص ع}$ س + لو$_{س ص ع}$ ص + لو$_{س ص ع}$ ع = ...

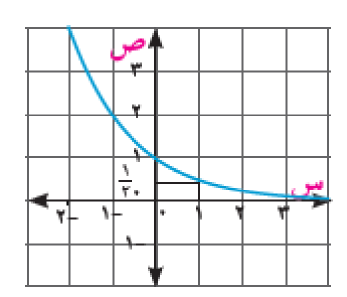
أ) س ص ب) س ص ع ج) ١ د) س ع



٧) إذا كان $٥^{أ}$ = ص فإن $٢٥^{أ+٢}$ = ...

(أ) ص (ب) $ص^٢$ (ج) ٦٢٥ (د) ٦٢٥ $ص^٢$

٨) الشكل المقابل يمثل الدالة



(أ) د(س) = $٢^{س+١}$ (ب) د(س) = $٢^{-س}$

(ج) د(س) = $٣^{-س}$ (د) د(س) = $٢^{س}$

الاسئلة المقالية

١) أوجد مجموعة حل المعادلة الاتية فى ح $لو_٣ (س+٦) = ٢ لو_٣ س$

٢) اشترى شخص سيارة بمبلغ ٢٥٠٠٠٠ جنية ، فإذا كان سعر السيارة يزيد بمعدل ٥٪ سنويا

كم يصبح سعر السيارة بعد ٦ سنوات ؟

حل الامتحان الثانى على الوحدة الثانية

١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨
ج	ج	ب	ب	ب	ج	د	ب

١) مجموعة الحل = {٣}

٢) ٣٣٥٠٢٤ جنية تقريبا



رياضيات

الصف الثانوى (علمى)

الوحدة الثالثة(النهايات والاتصال)

المحتويات



الوحدة الثالثة ـ النهايات والأتصال ـ القسم العلمى

الدرس الأول: مقدمة فى النهايات

المفاهيم الاساسية:

١ ـ **الكمية المعينة:** هي الكمية التي لها ناتج محدد مثل $\frac{٤}{٥}$ ، ٧ ، ٠,٤٥ ، $\sqrt{٣٠٢}$

٢ ـ **الكمية الغير معينة :** هي الكمية التي ليس لها ناتج محدد مثل: $\infty - \infty$ ، $\frac{٠}{٠}$ ، $\frac{\infty}{\infty}$ ، $\infty \times ٠$

٣ ـ **الكمية الغير معرفة:** هي الكمية التي ليس لها جواب على الإطلاق

ملحوظة:

إذا كان أ $\in$ ح فإن :-

١) $\infty + أ = \infty$ ٢) $-\infty + أ = -\infty$

٣) $\infty \times أ = \begin{cases} \infty & : أ > ٠ \\ -\infty & : أ < ٠ \end{cases}$ ٤) $-\infty \times أ = \begin{cases} \infty & : أ < ٠ \\ -\infty & : أ > ٠ \end{cases}$

مثال (١): أوجد ناتج العمليات الاتية إذا كان ذلك ممكنا :

١) $٥ + \infty$ ٢) $٦ \div ٠$ ٣) $-٤ \times \infty$ ٤) $\infty \times ٧$ ٥) $٥ - \infty$

الحل:

١) ∞ ٢) غير معرفة ٣) $-\infty$ ٤) ∞ ٥) $-\infty$

تدريب (١): أوجد ناتج العمليات الاتية إذا كان ذلك ممكنا :

١) $٥ \div ٠$ ٢) $٦ \times \infty$ ٣) $\infty \div \infty$ ٤) $٠ \div ٨$ ٥) $٠ \div ٠$



نهاية دالة عند نقطة

مثال (٢): إذا كانت د (س) = ٢ س +١ فأوجد $\lim_{س \to ٢}$ د(س)

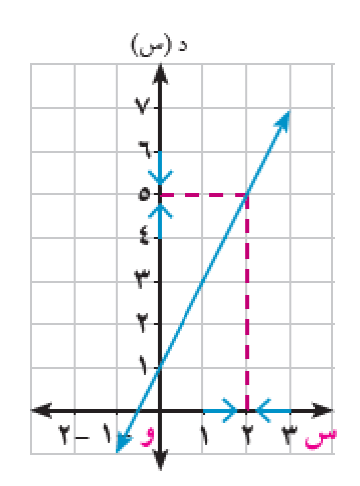
الحل

س	٢,١	٢,٠١	٢,٠٠١	٢,٠٠٠١	....	١,٩٩٩٩	١,٩٩٩	١,٩٩	١,٩
د(س)	٥,٢	٥,٠٢	٥,٠٠٢	٥,٠٠٠٢	....	٤,٩٩٩٨	٤,٩٩٨	٤,٩٨	٤,٨

نلاحظ : من الجدول السابق و التمثيل البيانى المقابل :

انه كلما اقتربت س من العدد ٢ من جهتي اليمين و اليسار فإن قيمة الدالة تقترب من العدد ٥

و هذه العبارة تكتب : $\lim_{س \to ٢}$ د(س) = ٥



تدريب (٢)

إذا كانت د (س) = ٢ س - ٣ فأكمل الجدول التالى و ماذا تلاحظ ؟

س	٥,١	٥,٠١	٥,٠٠١	٥,٠٠٠١	....	٤,٩٩٩٩	٤,٩٩٩	٤,٩٩	٤,٩
د(س)	......	......	......	......	......	......	......	......	......

نلاحظ : أنه كلما اقتربت س من العدد .... من جهتي اليمين و اليسار فإن قيمة الدالة تقترب من العدد ...

∴ $\lim_{س \to ٥}$ (٢س -٣) = ...

تعريف:

إذا كانت قيم د(س) تقترب من العدد الحقيقى ل كلما اقتربت س من العدد الحقيقى أ من جهتي اليمين و اليسار فإن : $\lim_{س \to أ}$ د(س) = ل

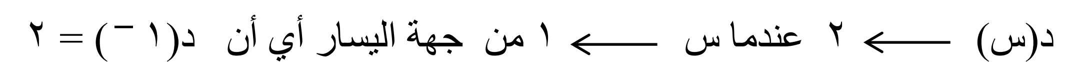
مثال (٣): إذا كانت د(س) = { س + ٢ ، س > ١ ؛ س + ١ ، س < ١ }

ارسم منحنى الدالة د وأبحث وجود نهـــا د(س) عندما س ← ١

الحل:

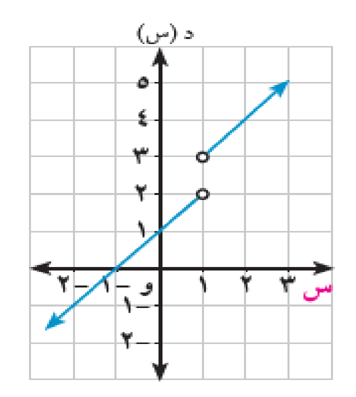
س	١,١	١,٠١	١,٠٠١	١,٠٠٠١	....	٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩	٠,٩٩	٠,٩
د(س)	٣,١	٣,٠١	٣,٠٠١	٣,٠٠٠١		١,٩٩٩٩	١,٩٩٩	١,٩٩	١,٩

نلاحظ : من الجدول ومن الشكل البيانى أن :-



د(س) ⟵ ٢ عندما س ⟵ ١ من جهة اليسار أي أن د(١^-) = ٢

د(س) ⟵ ٣ عندما س ⟵ ١ من جهة اليمين أي أن د(١^+) = ٣



∵ د(١^-) ≠ د(١^+)

∴ نهـــا د(س) عندما س ← ١ غير موجودة

تدريب (٣):

إذا كانت د(س) = { ٢ ، س > ٠ ؛ ـ٢ ، س < ٠ }

ارسم منحنى الدالة د وأبحث وجود نهـــا د(س) عندما س ← ٠



مثال (٤): الشكل البيانى المقابل يمثل الشكل البياني للدالة د

استعن بالشكل في الاجابة عن الاسئلة التالية :

١) مجال د(س) = ...

أ) ح – { ٢ } ب) ح – { ـ٢ } ج) ح د) { ـ٤ }



٢) د(ـ ٢) = ...

أ) ـ٤ ب) ٤ ج) غير معرفة د) صفر

٣) $\underset{س \leftarrow -٢}{\text{نهـــا}}$ د(س) = ...

أ) ـ٤ ب) ٤ ج) غير موجودة د) صفر

٤) $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـــا}}$ د(س) =.......

أ) ـ٤ ب) ٤ ج) غير موجودة د) صفر

حل مثال (٤):

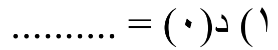
١) ح – { -٢ } ٢) غير معرفة ٣) -٤ ٤) ٠

ملحوظة هامة:

في المثال السابق: مجال الداله د(س) = ح ـ { ـ ٢ } وبالرغم من ذلك يوجد نهاية للدالة عندما س ← -٢

(معنى ذلك انه يمكن أن يوجد نهاية للدالة عندما تقترب س من عدد معين حتى لو كانت الدالة غير معرفة عند هذا العدد)

تدريب (٤): الشكل البيانى المقابل يمثل د(س) : اختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاه :



١) د(٠) = ...



أ) ١ ب) ٤ ج) غير معرفة د) ـ ٢

٢) د(٢) = ...



أ) ٣ ب) ٤ ج) غير معرفة د) صفر



٣) نهـــــــا د(س) = ...
س ← ٠

ﺃ) ١ ب) ٤ ج) غير موجودة د) صفر

٤) نهـــــا د(س)
س ← ٢

ﺃ) ٣ ب) ٤ ج) غير موجودة د) صفر

حلول التدريبات:

حل تدريب (١)

١) غير معرفة ٢) ∞ ٣) غير معينه ٤) ٠ ٥) كميةغير معينه

حل تدريب (٢):

س	٥,١	٥,٠١	٥,٠٠١	٥,٠٠٠١	....	٤,٩٩٩٩	٤,٩٩٩	٤,٩٩	٤,٩
د(س)	٧,٢	٧,٠٢	٧,٠٠٢	٧,٠٠٠٢	٧	٦,٩٩٩٨	٦,٩٩٨	٦,٩٨	٦,٨

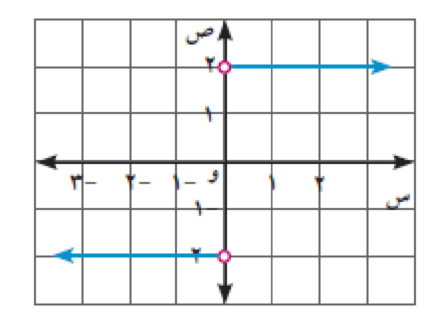
نلاحظ أنه كلما اقتربت س من العدد ٥ من اليمين أو من اليسار فإن قيمة الدالة تقترب من العدد ٧

نهـــــــا (٢س -٣) = ٧
س ← ٥

حل تدريب (٣):

س	-٠,١	-٠,٠١	-٠,٠٠١	-٠,٠٠١	٠	٠,٠٠٠١	٠,٠٠١	٠,٠١	٠,١
د(س)	-٢	-٢	-٢	-٢		٢	٢	٢	٢

نلاحظ من الجدول ومن الشكل البيانى أن :-



د(س) ⟵ -٢ عندما س ⟵ ٠ من جهة اليسار د(٠^-) = -٢

د(س) ⟵ ٢ عندما س ⟵ ٠ من جهة اليمين د(٠^+) = ٢

أى أن د(٠^-) ≠ د(٠^+)

∴ نهـــــا د(س) غير موجودة
س ← ٠

حل تدريب (٤):

١) ١ ٢) غير معرفة ٣) غير موجودة ٤) ٣

تمارين على الدرس الاول

١) إذا كانت د دالة حقيقية وكان الجدول التالي يبين بعض قيم الدالة عند قيم محددة للمتغير س

س	٣,١	٣,٠١	٣,٠٠١	←	٣	→	٢,٩٩٩	٢,٩٩	٢,٩
د(س)	٦,١	٦,٠١	٦,٠٠١	←	.....	→	٥,٩٩٩	٥,٩٩	٥,٩

فإن نهـــا د(س) = ...
س ← ٣

(أ) صفر (ب) ٣ (ج) ٦ (د) غير موجودة

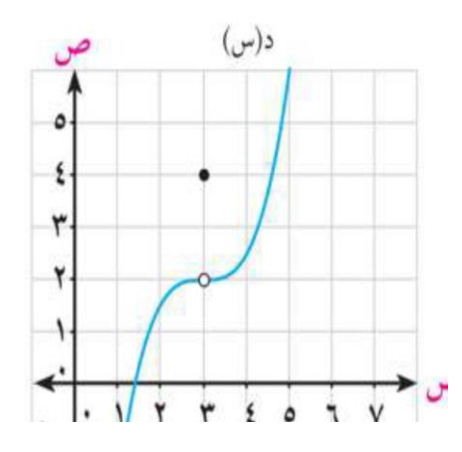
٢) إذا كان نهــا د(س) = ٢ فإن هذا يعني أن................................
س ← ١

(أ) الدالة د معرفة عند س = ١

(ب) الدالة د غير معرفة عند س = ١

(ج) د(١) = ٢

(د) كلما اقتربت س من العدد ١ من جهتي اليمين و اليسار فإن د(س) تقترب من العدد ٢



٣) إذا كان الشكل المقابل يمثل الرسم البياني للدالة د فإن..........

(أ) الدالة غير معرفة عند س = ٣

(ب) د(٣) = ٢

(ج) نهــا د(س) = ٢
س ← ٣



(د) $\lim_{س \leftarrow ٣}$ د(س) = ٤

---

٤) إذا كانت د : [– ٤ ، ٤] – { – ٢ } ← ح

والشكل البياني المقابل يبين التمثيل البياني

للدالة د فإن ....

(أ) د(-٢) = صفر

(ب) د(٠) = – ٣

(ج) $\lim_{س \leftarrow -٢}$ د(س) = صفر

(د) $\lim_{س \leftarrow -٢}$ د(س) غير موجودة

٥) إذا كان $\lim_{س \leftarrow ٣}$ د(س) = ٤ ، وكان ق (س) = د(س+١) – ٢ فإن $\lim_{س \leftarrow ٣}$ ق(س) = ...

(أ) ٢

(ب) ٣

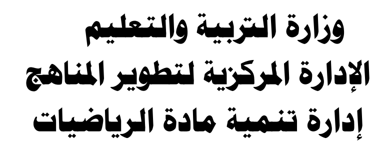
(ج) ٤

(د) ٦

حلول تمارين الدرس الأول

١) ج ٢) د ٣) ج ٤) ج ٥) أ




وزارة التربية والتعليم
الإدارة المركزية لتطوير المناهج
إدارة تنمية مادة الرياضيات

الدرس الثانى : إيجاد نهاية الدالة جبريا

المفاهيم الأساسية للدرس

نظرية (١): إذا كانت د(س) كثيرة حدود , أ ∋ ح فإن: نهـــا (س ← أ) د(س) = د(أ)

مثال (١):

أوجد: نهـــا (س ← ٢) (س^{٢} – ٩ س + ٧)

الحل:

نهـــا (س ← ٢) (س^{٢} – ٩ س + ٧) = ٤ – ١٨ + ٧ = -٧

تدريب (١)

أوجد: نهـــا (س ← ٣) (س^{٢} + س + ٥)

نظرية (٢):-

إذا كان نهـــا (س ← أ) د(س) = ل ، نهـــا (س ← أ) ى (س) = م فإن

١) نهـــا (س ← أ) ك د(س) = ك ل ، ك ∋ ح

٢) نهـــا (س ← أ) {د(س)±ى (س)} = ل±م

٣) نهـــا (س ← أ) {د(س) . ى (س)} = ل.م

٤) نهـــا (س ← أ) $\frac{\text{د(س)}}{\text{ى (س)}}$ = $\frac{\text{ل}}{\text{م}}$ حيث م ≠ ٠

٥) نهـــا (س ← أ) (د(س))^{ن} = ل^{ن} ، حيث ل^{ن} ∋ ح

نظرية (٣)

إذا كانت د(س) = ى (س) لكل س ∋ ح -{أ}

وكان نهـــا (س ← أ) ى (س) = ل فإن نهـــا (س ← أ) د (س) = ل



مثال (٢):

أوجد : $\lim\limits_{س \leftarrow ٢} \frac{س^{٢} - ٤}{س - ٢}$

الحل:

بفرض أن د(س) $= \frac{س^{٢} - ٤}{س - ٢}$ **فإن د(٢) =** $\frac{٤ - ٤}{٢ - ٢} = \frac{٠}{٠}$ كمية غير معينة

$\lim\limits_{س \leftarrow ٢} \frac{س^{٢} - ٤}{س - ٢} = \lim\limits_{س \leftarrow ٢} \frac{(س - ٢)(س + ٢)}{س - ٢}$

$= \lim\limits_{س \leftarrow ٢} (س + ٢) = ٢ + ٢ = ٤$

تدريب (٢):

أوجد: $\lim\limits_{س \leftarrow ٢} \frac{س^{٢} + ٣س - ١٠}{س - ٢}$

مثال (٣):

أوجد : $\lim\limits_{س \leftarrow -٣} \frac{س^{٣} + ٢٧}{س + ٣}$

الحل

$\lim\limits_{س \leftarrow -٣} \frac{س^{٣} + ٢٧}{س + ٣} = \lim\limits_{س \leftarrow -٣} \frac{(س + ٣)(س^{٢} - ٣س + ٩)}{س + ٣}$

$= \lim\limits_{س \leftarrow -٣} (س^{٢} - ٣س + ٩) = ٩ + ٩ + ٩ = ٢٧$

تدريب (٣)

أوجد : $\lim\limits_{س \leftarrow ١} \frac{س^{٣} - ١}{س - ١}$

مثال(٤):

أوجد: $\lim\limits_{س \leftarrow ٢} \frac{س^{٣} - ٨}{س^{٢} - س - ٢}$

الحل

$\lim\limits_{س \leftarrow ٢} \frac{(س - ٢)(س^{٢} + ٢س + ٤)}{(س - ٢)(س + ١)} = \frac{٤ + ٤ + ٤}{٢ + ١} = ٤$

تدريب (٤) :

أوجد: $\lim\limits_{\text{س} \to -٢} \dfrac{\text{س}^{٣} + ٨}{\text{س}^{٢} + ٢\,\text{س}}$

مثال(٥):

أوجد $\lim\limits_{\text{س} \to ٠} \dfrac{٢\text{س}}{(\text{س}+٣)^{٢} - ٩}$

الحل

$\lim\limits_{\text{س} \to ٠} \dfrac{٢\,\text{س}}{\text{س}^{٢} + ٦\,\text{س} + ٩ - ٩} = \lim\limits_{\text{س} \to ٠} \dfrac{٢\,\text{س}}{\text{س}^{٢} + ٦\,\text{س}}$

$\lim\limits_{\text{س} \to ٠} \dfrac{٢\,\text{س}}{\text{س}\,(\text{س} + ٦)} = \lim\limits_{\text{س} \to ٠} \dfrac{٢}{\text{س} + ٦} = \dfrac{١}{٣}$

تدريب (٥):

أوجد : $\lim\limits_{\text{س} \to ٠} \dfrac{(٣\,\text{س} - ٢)^{٢} - ٤}{٧\,\text{س}}$

ملحوظة :

يمكن استخدام القسمة المطولة أو القسمة التركيبية لتحليل المقدار الجبرى

مثال (٦):

أوجد : $\lim\limits_{\text{س} \to ٢} \dfrac{\text{س}^{٣} - \text{س}^{٢} - ٦\,\text{س} + ٨}{\text{س}^{٢} - ٥\,\text{س} + ٦}$

الحل

المقسوم عليه: $\text{س} - ٢$

خارج القسمة: $\text{س}^{٢} + \text{س} - ٤$

$\text{س}^{٣} - \text{س}^{٢} - ٦\,\text{س} + ٨$

$-\quad \text{س}^{٣} - ٢\,\text{س}^{٢}$

$\text{س}^{٢} - ٦\,\text{س} + ٨$

$-\quad \text{س}^{٢} - ٢\text{س}$

$-٤\,\text{س} + ٨$

$-\quad -٤\,\text{س} + ٨$

٠ ٠

$$\lim_{س \leftarrow ٢} \frac{(س - ٢)(س^٢ + س - ٤)}{(س - ٢)(س - ٣)} = \lim_{س \leftarrow ٢} \frac{(س^٢ + س - ٤)}{(س - ٣)} = -٢$$

ملحوظة : يمكن ايجاد خارج القسمة باستخدام القسمة التركيبية

	١	-١	-٦	٨
٢		٢	٢	-٨ +
×	١	١	-٤	٠

حيث أن معاملات خارج القسمه (الصف الثالث) برتبة اقل واحد من المقدار الجبرى الاصلى

أى ان خارج القسمة سيكون $س^٢ + س - ٤$ ثم نكمل الحل كما سبق

تدريب (٦) :

أوجد: $\lim_{س \leftarrow ٢} \frac{س^٣ + س^٢ - ٧ س + ٢}{س^٢ - ٤}$

مثال (٧)

أوجد : $\lim_{س \leftarrow ١} \frac{\sqrt{س+٣} - ٢}{س - ١}$

الحل

$$\lim_{س \leftarrow ١} \frac{\sqrt{س+٣} - ٢}{س - ١} \times \frac{\sqrt{س+٣} + ٢}{\sqrt{س+٣} + ٢} = \lim_{س \leftarrow ١} \frac{س + ٣ - ٤}{(س - ١)(\sqrt{س+٣} + ٢)}$$

$$= \lim_{س \leftarrow ١} \frac{س - ١}{(س - ١)(\sqrt{س+٣} + ٢)} = \lim_{س \leftarrow ١} \frac{١}{\sqrt{س+٣} + ٢} = \frac{١}{٤}$$

تدريب (٧):

أوجد : $\lim_{س \leftarrow -٣} \frac{\sqrt{س+٧} - ٢}{س + ٣}$

مثال (٨):

أوجد : $\lim\limits_{س \to ٣} \frac{\sqrt{س+١}-٢}{\sqrt{س+٦}-٣}$

الحل

$\lim\limits_{س \to ٣} \frac{\sqrt{س+١}-٢}{\sqrt{س+٦}-٣} \times \frac{\sqrt{س+١}+٢}{\sqrt{س+١}+٢} \times \frac{\sqrt{س+٦}+٣}{\sqrt{س+٦}+٣} = \lim\limits_{س \to ٣} \frac{(س+١-٤)(\sqrt{س+٦}+٣)}{(س+٦-٩)(\sqrt{س+١}+٢)}$

$= \lim\limits_{س \to ٣} \frac{(س-٣)(\sqrt{س+٦}+٣)}{(س-٣)(\sqrt{س+١}+٢)} = \lim\limits_{س \to ٣} \frac{(\sqrt{س+٦}+٣)}{(\sqrt{س+١}+٢)} = \frac{(\sqrt{٣+٦}+٣)}{(\sqrt{٣+١}+٢)} = \frac{٣}{٢}$

تدريب (٨):

أوجد : $\lim\limits_{س \to ٥} \frac{\sqrt{س+٤}-٣}{\sqrt{س-١}-٢}$

نظرية (٤)

$\lim\limits_{س \to أ} \frac{س^ن - أ^ن}{س - أ} = ن \times أ^{ن-١}$

نتائج على نظرية (٤)

١) $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{(س+أ)^ن - أ^ن}{س} = ن \times أ^{ن-١}$

٢) $\lim\limits_{س \to أ} \frac{س^ن - أ^ن}{س^م - أ^م} = \frac{ن}{م} \times أ^{ن-م}$

أمثلة محلولة

مثال (٩)

أوجد : $\lim\limits_{س \to ٢} \frac{س^٦ - ٦٤}{س - ٢}$

الحل

$\lim\limits_{س \to ٢} \frac{س^٦ - ٢^٦}{س - ٢} = ٦ \times ٢^٥ = ٦ \times ٣٢ = ١٩٢$

تدريب (٩)

أوجد : $\lim_{س \leftarrow -٢} \frac{س^٥ + ٣٢}{س + ٢}$

مثال (١٠)

أوجد : $\lim_{س \leftarrow ٢} \frac{س^٧ - ١٢٨}{س^٣ - ٨}$

الحل

$\lim_{س \leftarrow ٢} \frac{س^٧ - ٢^٧}{س^٣ - ٢^٣} = \frac{٧}{٣} \times ٢^٤ = \frac{١١٢}{٣}$

تدريب (١٠)

أوجد : $\lim_{س \leftarrow ٢} \frac{س^٥ - ٣٢}{س^٢ - ٤}$

مثال (١١)

أوجد: $\lim_{س \leftarrow ٣} \frac{٢س^٥ - ٤٨٦}{س^٢ - ٩}$

الحل:

بأخذ ٢ عامل مشترك من البسط

$= ٢ \lim_{س \leftarrow ٣} \frac{س^٥ - ٢٤٣}{س^٢ - ٩} = ٢ \lim_{س \leftarrow ٣} \frac{س^٥ - ٣^٥}{س^٢ - ٣^٢} = ٢ \times \frac{٥}{٢} \times ٣^٣ = ١٣٥$

تدريب (١١)

أوجد: $\lim_{س \leftarrow -٢} \frac{٢س^٩ + ١٠٢٤}{س^٢ - ٤}$

مثال (١٢)

أوجد : $\lim_{٢س \leftarrow ١} \frac{٣٢س^٥ - ١}{٢س - ١}$

الحل

$$\underset{\text{٢س} \leftarrow \text{١}}{\text{نهــا}} \frac{(\text{٢س})^{\text{٥}} - \text{١}^{\text{٥}}}{\text{٢س} - \text{١}} = \text{٥} \times \text{١}^{\text{٤}} = \text{٥}$$

تدريب (١٢)

أوجد : $\underset{\text{٣س} \leftarrow \text{١}}{\text{نهــا}} \frac{\text{٢٧س}^{\text{٣}} - \text{١}}{\text{٣س} - \text{١}}$

مثال (١٣)

أوجد : $\underset{\text{س} \leftarrow \text{٨}}{\text{نهــا}} \frac{\sqrt[\text{٣}]{\text{س}} - \text{٢}}{\text{س}^{\text{٢}} - \text{٦٤}}$

الحل

$$\underset{\text{س} \leftarrow \text{٨}}{\text{نهــا}} \frac{\text{س}^{\frac{\text{١}}{\text{٣}}} - \text{٨}^{\frac{\text{١}}{\text{٣}}}}{\text{س}^{\text{٢}} - \text{٨}^{\text{٢}}} = \frac{\frac{\text{١}}{\text{٣}}}{\text{٢}} \times \text{٨}^{\frac{\text{٥-}}{\text{٣}}} = \frac{\text{١}}{\text{١٩٢}}$$

تدريب (١٣)

أوجد : $\underset{\text{س} \leftarrow \text{٢٧}}{\text{نهــا}} \frac{\sqrt[\text{٣}]{\text{س}} - \text{٣}}{\text{س}^{\text{٢}} - \text{٧٢٩}}$

مثال (١٤)

أوجد : $\underset{\text{س} \leftarrow \text{١}}{\text{نهــا}} \frac{\text{س}^{\text{١٧}} - \text{١}}{\text{٣س}^{\text{٢}} + \text{٢س} - \text{٥}}$

الحل

$$\underset{\text{س} \leftarrow \text{١}}{\text{نهــا}} \frac{\text{س}^{\text{١٧}} - \text{١}}{(\text{س} - \text{١})(\text{٣س} + \text{٥})} = \underset{\text{س} \leftarrow \text{١}}{\text{نهــا}} \frac{\text{س}^{\text{١٧}} - \text{١}^{\text{١٧}}}{\text{س} - \text{١}} \times \underset{\text{س} \leftarrow \text{١}}{\text{نهــا}} \frac{\text{١}}{\text{٣س} + \text{٥}}$$

$$= \text{١٧} \times \text{١}^{\text{١٦}} \times \frac{\text{١}}{\text{٨}} = \frac{\text{١٧}}{\text{٨}}$$

تدريب (١٤)

أوجد : $\underset{\text{س} \leftarrow \text{٢}}{\text{نهــا}} \frac{\text{س}^{\text{٧}} - \text{١٢٨}}{\text{س}^{\text{٢}} - \text{س} - \text{٢}}$

مثال (١٥)

أوجد : $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{(س+٥)^٤ - ٦٢٥}{٧س}$

الحل

$\lim\limits_{س+٥ \to ٥} \left(\frac{(س+٥) - ٥}{٧س} \times \frac{(س+٥)^٤ - ٥^٤}{(س+٥) - ٥} \right) = \frac{١}{٧} \times ٤ \times ٥^٣ = \frac{٥٠٠}{٧}$

يمكن الحل أيضاً باستخدام نتيجه على نظرية (٤)

$\frac{١}{٧} \lim\limits_{س \to ٠} \frac{(س+٥)^٤ - ٥^٤}{س} = \frac{١}{٧} \times ٤ \times ٥^{٤-١} = \frac{٥٠٠}{٧}$

تدريب (١٥)

أوجد: $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{(٢س+٣)^٣ - ٢٧}{٢س}$

مثال (١٦)

أوجد : $\lim\limits_{س \to ٢} \frac{س^٥ + س^٣ - ٤٠}{س - ٢}$

الحل

$\lim\limits_{س \to ٢} \frac{س^٥ - ٣٢ + س^٣ - ٨}{س - ٢} = \lim\limits_{س \to ٢} \frac{س^٥ - ٢^٥}{س - ٢} + \lim\limits_{س \to ٢} \frac{س^٣ - ٢^٣}{س - ٢}$

$= ٥ \times ٢^٤ + ٣ \times ٢^٢ = ٩٢$

ملحوظة : يمكن حل المثال السابق باستخدام القسمه المطولة

تدريب (١٦)

أوجد : $\lim\limits_{س \to ٣} \frac{س^٤ + س^٢ - ٩٠}{س - ٣}$

حلول التدريبات

رقم التدريب	الاجابة	رقم التدريب	الاجابة
١	١٧	٩	٨٠
٢	٧	١٠	٢٠
٣	٣	١١	ـ ١١٥٢
٤	ـ ٦	١٢	٣
٥	$\frac{-١٢}{٧}$	١٣	$\frac{١}{١٤٥٨}$
٦	$\frac{٩}{٤}$	١٤	$\frac{٤٤٨}{٣}$
٧	$\frac{١}{٤}$	١٥	٢٧
٨	$\frac{٢}{٣}$	١٦	١١٤

تمارين على الدرس الثاني

١) إذا كان $\lim_{س \to ١} \frac{س^٣ - ٧ س + ك}{س - ١} = -٤$ فإن ك =............

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٦

٢) $\lim_{س \to ٣} \frac{\sqrt{س+١} - ٢}{س - ٣} =$ ....

(أ) $\frac{١}{٤}$ (ب) $\frac{١}{٢}$ (جـ) ٤ (د) صفر

٣) $\lim_{س \to -١} \frac{س^{٢٠٢٣} + ١}{س + ١} =$ ....

(أ) ٢٠٢٣ (ب) ٢٠٢٢ (جـ) −٢٠٢٣ (د) −٢٠٢٢

٤) $\lim_{س \to ١} \left(\frac{س}{س^٢ - ١} - \frac{١}{س^٢ - ١} \right) =$ ....

(أ) صفر (ب) $\frac{١}{٢}$ (جـ) ١ (د) ٢

٥) إذا كان $\lim_{س \to ٠} \frac{س^٢ + ب س}{س} = ١$ فإن $\lim_{س \to ٠}$ ب =............

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

٦) إذا كان $\underset{س \leftarrow ٣}{نهـا} \frac{س^٢ - ٩}{س - ٣} = ب$ فإن $\underset{س \leftarrow ب}{نهـا} ٩ =$ ....

(أ) صفر (ب) ٣ (ج) ٦ (د) ٩

٧) $\underset{س \leftarrow ١}{نهـا} \frac{٢س^٣ + ٥س^٢ - ٧}{س - ١} =$ ....

(أ) ٧ (ب) ١٤ (ج) ١٥ (د) ١٦

٨) إذا كان د(س) = س^٢ + ٥ فإن $\underset{س \leftarrow ١}{نهـا} \frac{د(س) - د(١)}{س - ١} =$ ....

(أ) ١ (ب) ٥ (ج) ٢ (د) صفر

٩) إذا كان د(س) = ٣س + ١ فإن $\underset{هـ \leftarrow ٠}{نهـا} \frac{د(س+هـ) - د(س)}{هـ} =$ ....

(أ) ١ (ب) ١ (ج) ٢ (د) ٣

١٠) $\underset{و \leftarrow ٠}{نهـا} \frac{(١ + ٥و)^٩ - ١}{٣و} =$ ....

(أ) ٣ (ب) ٥ (ج) ٨ (د) ١٥

١١) $\underset{س \leftarrow \sqrt{٢}}{نهـا} \frac{س^٣ - ٢\sqrt{٢}}{س^٢ - ٢} =$ ....

(أ) $\sqrt{٢}$ (ب) $\frac{٣}{٢}\sqrt{٢}$ (ج) $\frac{٢}{٣}\sqrt{٢}$ (د) صفر



١٢) إذا كان د(س) = $\frac{١}{س}$: س ≠ صفر ، ر(س) = $\frac{-١}{س}$: س ≠ صفر فإن

نهـــا (د + ر) (س) = ...
س ← ٠

ⓐ صفر ⓑ غير موجودة ⓒ ١ ⓓ -١

١٣) إذا كان د(س) = ٢ س + ٣ ، ر(س) = $\frac{س - ٣}{٢}$ فإن :

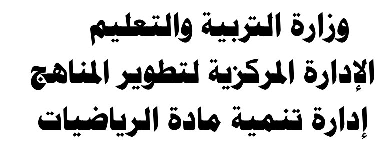
نهـــا (د ∘ ر) (س) = ...
س ← ١

ⓐ صفر ⓑ ١ ⓒ ٢ ⓓ ٣

حلول تمارين الدرس الثاني

١) د	٢) أ	٣) أ	٤) ب	٥) ب
٦) د	٧) د	٨) جـ	٩) د	١٠) د
١١) ب	١٢) أ	١٣) ب		





الدرس الثالث : نهاية الدالة عند اللانهاية

مفاهيم اساسية: نظرية (١) $\lim\limits_{\text{س} \to \infty} \frac{1}{\text{س}} = \text{صفر}$

نتائج هامة ١) $\lim\limits_{\to \infty} \frac{\text{أ}}{} = \text{صفر}$ ٢) $\lim\limits_{\to \infty} \frac{\text{أ}}{} = \text{صفر}$ ، ن ∈ ع₊ ، أ: ثابت

مثال محلول (١): أوجد: $\lim\limits_{\to \infty} \frac{٢ \quad ٣}{٣ \quad -٦}$

الحـــــــــــــل

بقسمة كل من البسط والمقام على

$$\lim\limits_{\text{س} \to \infty} \frac{٢ \quad ٣}{٣ \quad -٦} = \lim\limits_{\text{س} \to \infty} \frac{٢ \quad \frac{٣}{}}{٣ \quad \frac{٦}{}} = \frac{٢ \quad ٠}{٣ \quad -٠} = \frac{٢}{٣}$$

تدريب (١): أوجد: $\lim\limits_{\to \infty} \frac{٥ \quad ٢}{٧ \quad -٢}$

مثال محلول (٢): $\lim\limits_{\to \infty} (\text{س}^٣ \quad ٧\text{س}^٢ \quad ٢)$

الحـــــــــــــل

بأخذ س^٣ عامل مشترك :

$$\lim\limits_{\text{س} \to \infty} \text{س}^٣ (١ \quad \frac{٧}{} \quad \frac{٣}{^٢}) = \infty (١+٠+٠) = \infty$$

تدريب (٢): $\lim\limits_{\to \infty} (٤ - ٣ \quad ^٣)$

ملاحظات: عند إيجاد نها $\frac{\text{د(س)}}{\text{ر(س)}}$ حيث د(س) ، ر(س) دوال كثيرات الحدود فإن :

١) النهايه = عدد حقيقى لا يساوي الصفر إذا كانت درجة البسط = درجة المقام .
٢) النهايه = صفر إذا كامنت درجة البسط أصغر من درجة المقام .
٣) النهاية = $\pm \infty$ إذا كانت درجة البسط أكبر من درجة المقام .

مثال محلول (٣): أوجد : $\underset{\infty \leftarrow}{\text{نهـا}} \dfrac{٣ \quad ٢ - ٥ \quad ١}{٢ \quad ٣}$

الحـــــــــــــــــل

بقسمة كل من البسط والمقام على

$$\underset{\infty \leftarrow}{\text{نهـا}} \frac{٣ \quad ٢ \quad ٥ \quad ١}{٢ \quad ٣} = \underset{\infty \leftarrow}{\text{نهـا}} \frac{٣ \quad ٥ \quad \frac{١}{}}{٢ \quad \frac{٣}{}} = \frac{(\infty - ٥ + \text{صفر})}{٢ + \text{صفر}} = \infty$$

تدريب (٣): أوجد : $\underset{\text{س} \leftarrow \infty}{\text{نهـا}} \dfrac{٥ \quad -٧ \quad ٢}{٣ \quad +١}$

مثال محلول (٤):

أوجد: $\underset{\infty \leftarrow}{\text{نهـا}} \dfrac{٥ \quad ٢+٣ \quad +١}{٢ \quad ٣+٧}$

الحـــــــــــــــــل

.بقسمة كل من البسط و المقام على $\text{س}^٣$:

$$\underset{\text{س} \leftarrow \infty}{\text{نهـا}} \frac{٥ \quad ٢+٣ \quad +١}{٢ \quad ٣+٧} = \underset{\infty \leftarrow}{\text{نهـا}} \frac{\frac{٥}{} \quad \frac{٣}{٢} \quad \frac{١}{٣}}{٢ \quad \frac{٧}{٢}} = \frac{٠+٠+٠}{٢ \quad +٠} = \text{صفر}$$

تدريب (٤) أوجد : $\underset{\infty \leftarrow}{\text{نهـا}} \dfrac{٥ \quad ٣ \quad ٢}{٢ \quad ٣+٧ \quad -٧}$

مثال محلول (٥)

أوجد : $\underset{\text{س} \leftarrow \infty}{\text{نهـا}} \dfrac{(٣ \quad -٥)(٢ \quad +١)}{٢ \quad - ٣ \quad ٢}$



الحـــــــــــــــــــل

بقسمة كل من البسط والمقام على $س^٢$

$$\lim_{\infty \leftarrow} \frac{(٣ \quad \frac{٥}{\quad})(٢ \quad \frac{١}{\quad})}{١ - \frac{٣}{\quad} \quad \frac{٢}{٢}} = \lim_{\infty \leftarrow} \quad \frac{(٣ - ٠)(٢ + ٠)}{١ - ٠ + ٠} = ٦$$

تدريب (٥)

أوجد : $\lim_{\infty \leftarrow} \frac{(٤ \quad -٥)(\quad -٣)}{٢ \quad +٣ \quad ٢}$

مثال محلول (٦)

أوجد : $\lim_{\infty \leftarrow} \frac{\sqrt[٣]{٨ \quad ٣ \quad ٤ \quad ٢}}{\sqrt{٩ \quad ٢ \quad ٣}}$

الحـــــــــــــــــــل

بقسمة كل من البسط والمقام على

$$\lim_{\infty \leftarrow} \frac{\sqrt[٣]{٨ \quad \frac{٤}{٢} \quad \frac{٢}{٣}}}{\sqrt{٩ \quad \frac{٣}{٢}}} = \frac{\sqrt[٣]{٨ + ٠ - ٠}}{\sqrt{٩ - ٠}} = \frac{٢}{٣}$$

تدريب (٦):

أوجد : $\lim_{\infty \leftarrow} \frac{٢ \quad -٥}{\sqrt{٤ \quad ٢+^{٢} \quad ١+}}$

مثال محلول (٧)

أوجد : $\lim_{\infty \leftarrow} (٣ \quad ^{-٥} \quad ٤ \quad ^{-٢} \quad ٥)$

الحـــــــــــــــــــل

$$\lim_{\infty \leftarrow} \quad \frac{٣}{٥} \quad \frac{٤}{٢} \quad ٥) = (٠ + ٠ + ٥) = ٥$$

تدريب (٧):

أوجد : $\lim_{\infty \leftarrow} (٢ \quad ^{-٣} \quad ٣ \quad ^{-٤} \quad ٦)$



حلـول التدريبات

رقم التدريب	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧
الاجابة	$\frac{٥}{٧}$	$-\infty$	$-\infty$	صفر	$\frac{٤}{٣}$	١	-٦



تمارين على الدرس الثالث

١) $\lim\limits_{س \to \infty} \dfrac{٣س^{٢} + ٧}{٥س - ١} =$ ....

أ) $\frac{٣}{٥}$ ب) $\frac{٥}{٣}$ ج) صفر د) ∞

٢) $\lim\limits_{س \to \infty} \dfrac{٥س - ١}{٣س^{٢} + ٧} =$ ....

أ) $\frac{٣}{٥}$ ب) $\frac{٥}{٣}$ ج) صفر د) ∞

٣) $\lim\limits_{س \to \infty} \dfrac{٥س^{٢} - ١}{٣س^{٢} + ٧} =$ ....

أ) $\frac{٣}{٥}$ ب) $\frac{٥}{٣}$ ج) صفر د) ∞

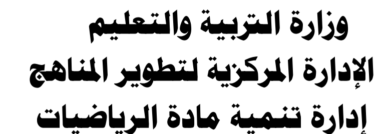
٤) $\lim\limits_{س \to \infty} \left(\dfrac{س}{س^{٢} - ١} - \dfrac{١}{س^{٢} - ١} \right) =$ ....

أ) صفر ب) $\frac{١}{٢}$ ج) ١ د) ∞

٥) إذا كان $\lim\limits_{س \to \infty} \dfrac{أ س^{٢} + ب س + ١}{٢س + ٥} = ٣$ فإن (أ ، ب) = ...

أ) (٠ ، ٣) ب) (٠ ، ٦) ج) (٦ ، ٠) د) (٣ ، ٠)





٦) $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \left(١ + س^{٢} - س^{٣} \right)$ = ...

(أ) صفر (ب) ١ (ج) ∞ (د) $-\infty$

٧) $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \left(١ + س^{-٢} - س^{-٣} \right)$ = ...

(أ) صفر (ب) ١ (ج) ∞ (د) $-\infty$

٨) $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \dfrac{س - س\sqrt{س}}{س}$ = ...

(أ) صفر (ب) ١ (ج) ∞ (د) $-\infty$

٩) $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt{س^{٢} + ١}}{|س|}$ = ...

(أ) صفر (ب) ١ (ج) ∞ (د) $-\infty$

١٠) $\underset{هـ \to \infty}{\text{نهـا}} \left(\sqrt{هـ^{٢} + ١} - هـ \right)$ = ...

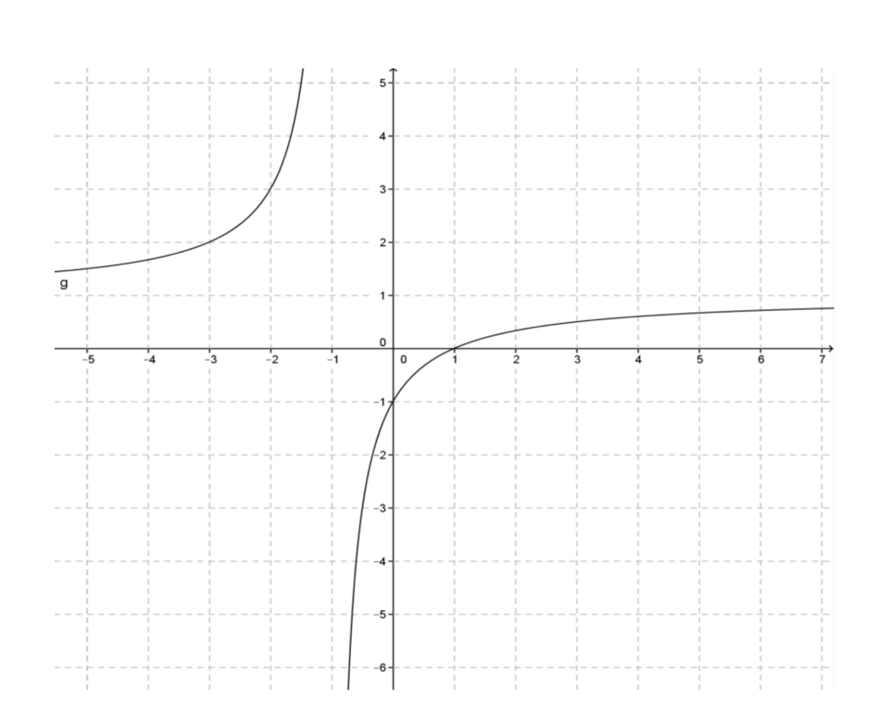
(أ) صفر (ب) ١ (ج) ∞ (د) $-\infty$



١١) إذا كان الشكل المقابل

يمثل الشكل البياني للدالة د فإن

نهـــــــا د(س) =.........
س ← ∞



أ) صفر

ب) ١

ج) ∞

د) - ∞

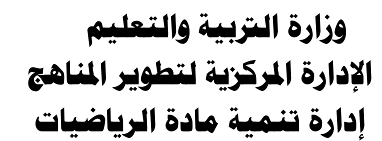
حلول تمارين الدرس الثالث

١) د ٢) ج ٣) ب ٤) أ ٥) ب

٦) د ٧) ب ٨) د ٩) ب ١٠) أ

١١) ب





الدرس الرابع: (نهايات الدوال المثلثيه)

مفاهيم اساسية: إذا كان س قياس الزاويه بالتقدير الدائرى فإن:

نظرية (١)

١) $\lim_{\text{س} \to 0} \frac{\text{جا}}{\ } = 1$ ٢) $\lim_{\text{س} \to 0} \frac{\text{ظا}}{\ } = 1$

نتائج هامة

١) $\lim_{\text{س} \to 0} \frac{\text{جا أ}}{\ } = \text{أ}$ مثلاً : $\lim_{\text{س} \to 0} \frac{\text{جا ٥}}{\ } = 5$

٢) $\lim_{\text{س} \to 0} \frac{\text{ظا أ}}{\ } = \text{أ}$ مثلاً : $\lim_{\text{س} \to 0} \frac{\text{ظا ٣}}{\ } = 3$

٣) $\lim_{\text{س} \to 0} \frac{1 - \text{جتا}}{\ } = \text{صفر}$

مثال محلول (١): اوجد :

$$\lim_{\text{س} \to 0} \frac{\text{جا ٥}}{3}$$

الحل:

بقسمة كل من البسط و المقام على س

$$\lim_{\text{س} \to 0} \frac{\frac{\text{جا ٥}}{\ }}{\frac{3}{\ }} = \frac{5}{3}$$

تدريب (١): اوجد: $\lim_{\text{س} \to 0} \frac{\text{ظا ٣ س}}{4}$

مثال محلول (٢): اوجد $\lim\limits_{\text{س} \to \text{٠}} \frac{\text{١} - \text{جتا}}{\text{جا ٥}}$

الحل:

$$\lim\limits_{\text{س} \to \text{٠}} \frac{\text{١} - \text{جتا}}{\quad} \times \frac{\quad}{\text{جا ٥}} = \text{٠} \times \frac{\text{١}}{\text{٥}} = \text{٠}$$

تدريب (٢): اوجد $\lim\limits_{\text{س} \to \text{٠}} \frac{\text{١} - \text{جتا}}{\text{ظا ٣}}$

مثال محلول (٣): اوجد $\lim\limits_{\text{س} \to \text{٠}} \text{٦ س}^{\text{٢}} \text{ قتا٢ س ظتا}$

الحل:

$$\lim\limits_{\text{س} \to \text{٠}} \frac{\text{٦} \quad \text{٢}}{\text{جا٢} \quad \text{ظا}} = \text{٦} \times \lim\limits_{\text{س} \to \text{٠}} \frac{\quad}{\text{جا٢}} \times \frac{\quad}{\text{ظا}} = \text{٦} \times \frac{\text{١}}{\text{٢}} \times \text{١} = \text{٣}$$

تدريب (٣): اوجد $\lim\limits_{\text{س} \to \text{٠}} \text{٣ س قتا٢}$

مثال محلول (٤) اوجد $\lim\limits_{\text{س} \to \text{٠}} \frac{\text{ظا٣} \quad ^{\text{٢}} + \text{جا}^{\text{٢}} \text{ ٥}}{\text{٢}}$

الحل:

بقسمة كل من البسط و المقام على $\text{س}^{\text{٢}}$

$$\lim\limits_{\text{س} \to \text{٠}} \frac{\frac{\text{ظا٣} \quad \text{٢}}{\text{٢}} \quad \frac{\text{جا}^{\text{٢}} \text{ ٥}}{\text{٢}}}{\frac{\text{٢}}{\text{٢}}} = \frac{\text{٣} + \text{٢٥}}{\text{١}} = \text{٢٨}$$

تدريب (٤): اوجد $\lim_{\text{س} \to ٠} \frac{\text{جا } ٥ \ ^{٣} + \text{جا}^{٣} \ ٥}{٢ \ ^{٣}}$

مثال محلول (٥): اوجد

$$\lim_{\text{س} \to ٠} \frac{\text{جا}٢}{٥ \ \text{جتا } ٢}$$

الحل:

بقسمة كل من البسط و المقام على

$$\lim_{\text{س} \to ٠} \frac{\frac{\text{جا } ٢}{}}{٥ \ \text{جتا } ٢} = \frac{٢}{٥ \times ١} = \frac{٢}{٥}$$

تدريب (٥):

اوجد $\lim_{\text{س} \to ٠} \frac{٧\text{ظا } ٣}{\text{جتا}٣}$

حلـــول التدريبات

رقم التدريب	١	٢	٣	٤	٥
الاجابة	$\frac{٣}{٤}$	صفر	$\frac{٣}{٢}$	٦٥	٢١



تمارين على الدرس الرابع

١) $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا ٣ س + ظا ٤س}}{\text{٥س}}$ = ...

(أ) $\frac{٥}{٧}$ (ب) $\frac{٧}{٥}$ (ج) صفر (د) ١

٢) $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}^٢ \text{٣س}}{\text{٢س}^٢}$ = ...

(أ) $\frac{٣}{٢}$ (ب) $\frac{٩}{٢}$ (ج) $\frac{٩}{٤}$ (د) صفر

٣) $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}^٢ \text{٣س}}{\text{٢س}}$ = ...

(أ) $\frac{٣}{٢}$ (ب) $\frac{٩}{٢}$ (ج) $\frac{٩}{٤}$ (د) صفر

٤) $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{ظا ٥س جا ٣س}}{\text{س}^٢}$ = ...

(أ) صفر (ب) ٨ (ج) ١ (د) ١٥

٥) إذا كان $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}} \frac{\text{حا (س − ١)}}{\text{س}^٢ − ١}$ = ...

(أ) صفر (ب) ١ (ج) ٢ (د) $\frac{١}{٢}$

٦) $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{(١− جتا س) ظا س}}{\text{س جا س}}$ = ...

(أ) صفر (ب) ١ (ج) ∞ (د) غير موجودة



٧) $\lim_{س \to ٠} \frac{\text{جتا س} - \text{جا س} - ١}{٢\text{ س}}$ = ...

ⓐ صفر　　ⓑ ١　　ⓙ $\frac{١}{٢}$　　ⓓ $-\frac{١}{٢}$

٨) $\lim_{س \to ٠} \frac{١ - \text{جتا س}}{\text{س}^٢}$ = ...

ⓐ صفر　　ⓑ ١　　ⓙ $\frac{١}{٢}$　　ⓓ $-\frac{١}{٢}$

٩) $\lim_{س \to ٠}$ س(قتا٢س ـ ظتا س) = ...

ⓐ صفر　　ⓑ ١　　ⓙ $\frac{١}{٢}$　　ⓓ $-\frac{١}{٢}$

١٠) $\lim_{س \to \infty}$ ٢ س جا $\frac{١}{\text{س}}$ = ...

ⓐ صفر　　ⓑ ١　　ⓙ ٢　　ⓓ ∞

حلول تمارين الدرس الرابع

١) ب	٢) ب	٣) د	٤) د	٥) د
٦) أ	٧) د	٨) ج	٩) د	١٠) ج

الدرس الخامس: بحث وجود النهاية عند نقطة

المفاهيم الاساسية للدرس: النهاية اليمنى ــ النهاية اليسرى

يقال إن نهاية الدالة د عندما س تؤول إلى ﻡ تساوى ل إذا وفقط إذا كان نهايتها من اليمين ونهايتها من اليسار عندما س تؤول إلى ﻡ متساويتين وكل منهما تساوى ل حيث **ل ∋ ع**

وتكتب رمزيا

نهــــــــا (س ← ﻡ) د(س) = ل إذا وفقط إذا كان : د (ﻡ $^+$) = د (ﻡ $^-$) = ل

حيث

د (ﻡ $^+$) = نهــــــــا (س ← ﻡ $^+$) د(س) (النهاية اليمنى للدالة)

د (ﻡ $^-$) = نهــــــــا (س ← ﻡ $^-$) د(س) (النهاية اليسرى للدالة)

أمثلة محلولة

مثال توضيحى: لاحظ: انه

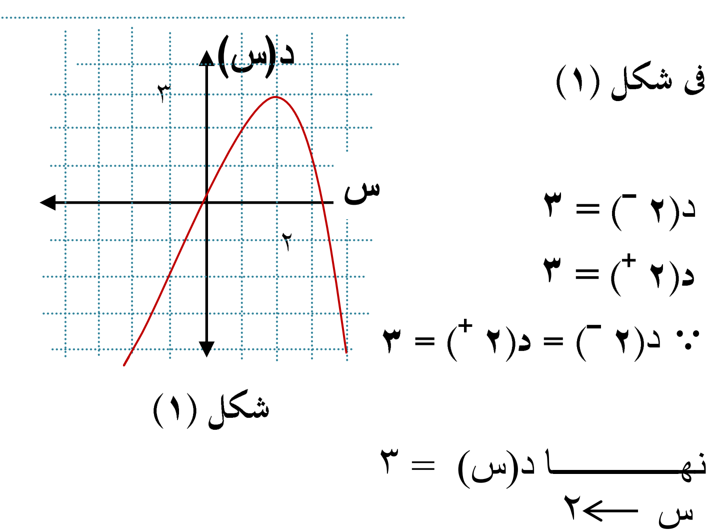
فى شكل (١)

د(٢ $^-$) = ٣

د(٢ $^+$) = ٣

∵ د(٢ $^-$) = د(٢ $^+$) = ٣

نهــــــــا (س ← ٢) د(س) = ٣



شكل (١)

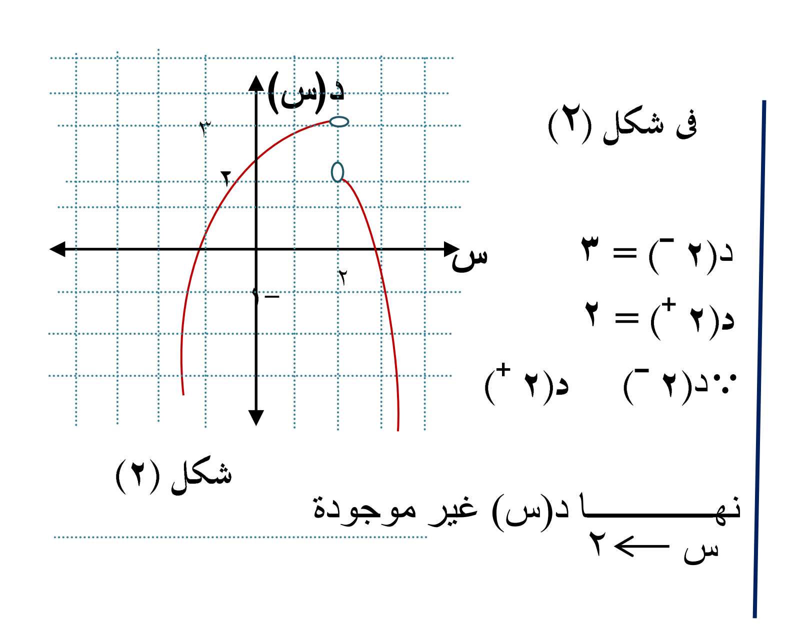
فى شكل (٢)

د(٢ $^-$) = ٣

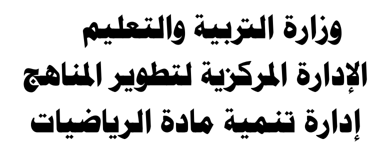
د(٢ $^+$) = ٢

∵ د(٢ $^-$) ≠ د(٢ $^+$)

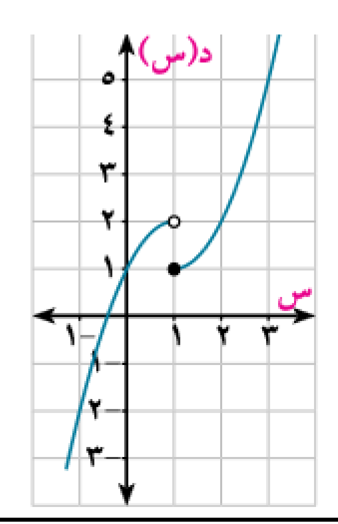
نهــــــــا (س ← ٢) د(س) غير موجودة



شكل (٢)




تدريب (١) في الشكل المقابل اكمل :



(١) د(١ $^-$) = ...

(٢) د(١ $^+$) = ...

(٣) $\lim_{س \leftarrow ١}$ د (س) = ...

مثال (٢): ابحث وجود نهاية الدالة : د(س) = { س^٢ ، س < ٢ ؛ ٢ س ، س > ٢ }

عندما س ← ٢

الحل:

د(٢ $^-$) = ٢^٢ = ٤ ، **د(٢$^+$) = ٢ × ٢ = ٤**

∵ د(٢ $^-$) = **د**(٢ $^+$) = ٤ ∴ $\lim_{س \leftarrow ٢}$ د(س) = ٤

تدريب (٢): ابحث وجود نهاية الدالة : د(س) = { س^٣ ، س < ١ ؛ ٢ س ـ ١ ، س > ١ }

عندما س ← ١

مثال (٣): ابحث وجود نهاية الدالة : د(س) = { ٣ س +١ ، س < ٠ ؛ س^٢ +٢ ، س > ٠ }

عندما س ← ٠



الحل:

د(٠⁻) = ٣ × ٠ +١ = ١ ، د(٠⁺) =٠+ ٢ = ٢

∵ د(٠⁻) ≠ د(٠⁺) ∴ نهـــــا د(س) غير موجودة
س ← ٠

تدريب (٣):

ابحث وجود نهاية الدالة : د(س) = { ٥ ، س > ٠ ؛ س+٥ ، س ≤ ٠ }

عندما س ← ٠

مثال (٤):

أوجد قيمة ك التي تجعل للدالة د(س) نهاية عنما س ← ٣ حيث:

د (س) = { ٢ س + ك ، س > ٣ ؛ س^{٢} +٢ ، س ≤ ٣ }

الحل:

∵ د(س) لها نهاية عنما س ← ٣ ∴ د(٣⁻) = د(٣⁺)

∴ ٢ × ٣ + ك = ٣^{٢} +٢ ← ك + ٦ =١١ ∴ ك = ٥

تدريب (٤): أوجد قيمة ك التي تجعل للدالة د(س) نهاية عنما س ← ـ ١ حيث

د(س) = { س^{٢} + ك ، س ≤ ـ ١ ؛ س +٤ ، س > ـ ١ }



مثال (٥):

ابحث وجود نهاية الدالة : د(س) = $\begin{cases} \dfrac{\text{جا ٦س}}{\text{٢س}} & \text{س} < ٠ \\ ٣ & \text{س} \geq ٠ \end{cases}$

عندما س ← ٠

الحل:

د(٠⁺) = $\lim\limits_{\text{س} \to ٠^+}$ ٣ = ٣ ، د(٠⁻) = $\lim\limits_{\text{س} \to ٠^-} \dfrac{\text{جا ٦س}}{\text{٢س}}$ = ٣

∵ د(٠⁻) = د(٠⁺) = ٣

∴ $\lim\limits_{\text{س} \to ٠}$ د(س) = ٣

تدريب (٥):

ابحث وجود نهاية الدالة : د(س) = $\begin{cases} \dfrac{\text{ظا ٤س}}{\text{٢س}} & \text{س} < ٠ \\ ٣ & \text{س} \geq ٠ \end{cases}$

عندما س ← ٠

حلول التدريبات

تدريب (١)

(١) ٢ ، (٢) ١ ، (٣) غير موجودة

تدريب (٢): $\lim\limits_{\text{س} \to ١}$ د(س) = ١

تدريب (٣): $\lim\limits_{\text{س} \to ٠}$ د(س) = ٥

تدريب (٤): ك = ٢

تدريب (٥): $\lim\limits_{\text{س} \to ٠}$ د(س) غير موجودة

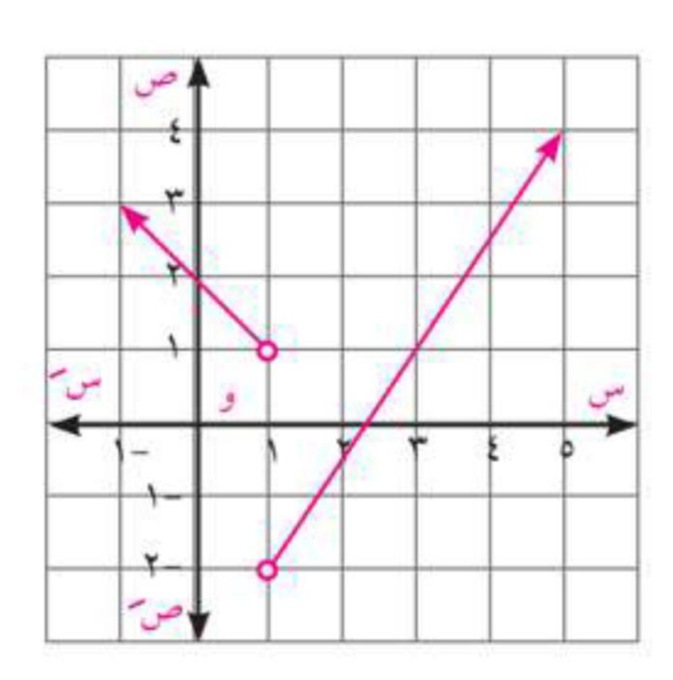


تمارين على الدرس الخامس

اختر الاجابة الصحيحة

الشكل المقابل يوضح الشكل البياني للدالة د

استعن بالشكل في الاجابة عن الأسئلة من ١ : ٣





١) $\underset{س \leftarrow ١^{+}}{\text{نهـا}}$ د(س) = ...

ⓐ ١   ⓑ - ٢

ⓒ صفر   ⓓ غير موجودة

٢) $\underset{س \leftarrow ١^{-}}{\text{نهـا}}$ د(س) = ...

ⓐ ١   ⓑ - ٢

ⓒ صفر   ⓓ غير موجودة

٣) $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}}$ د(س) = ...

ⓐ ١   ⓑ - ٢   ⓒ صفر   ⓓ غير موجودة

الشكل المقابل يوضح الشكل البياني للدالة د

استعن بالشكل في الاجابة عن الأسئلة من ٤ : ٥

٤) د(٢) = ...

ⓐ ٣   ⓑ صفر

ⓒ غيرمعينة   ⓓ غير موجودة

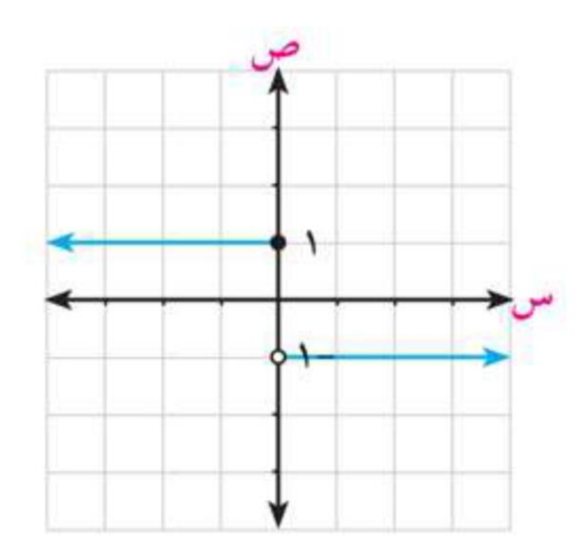
٥) $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـا}}$ د(س) = ...

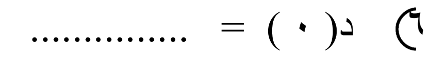
ⓐ ٣   ⓑ صفر

ⓒ غيرمعينة   ⓓ غير موجودة

الشكل المقابل يوضح الشكل البياني للدالة د

استعن بالشكل في الاجابة عن الأسئلة من ٦ : ٩





٦) د(٠) = ...

ⓐ ١ ⓑ صفر
ⓒ ـ ١ ⓓ غير موجودة

٧) د($^{+}$٠) = ...

ⓐ ١ ⓑ صفر
ⓒ ـ ١ ⓓ غير موجودة

٨) د($^{-}$٠) = ...

ⓐ ١ ⓑ صفر ⓒ ـ ١ ⓓ غير موجودة

٩) نهـــــا د (س) = ...
س ← ٠

ⓐ ١ ⓑ صفر ⓒ ـ ١ ⓓ غير موجودة

١٠) نهـــــا $\sqrt{\text{س} - ٤}$ = ...
س ← ٤

ⓐ صفر ⓑ ٢ ⓒ ـ ٢ ⓓ غير موجودة

١١) نهـــــا $\frac{\text{س}}{|\text{س}|}$ = ...
س ← ٠

ⓐ ١ ⓑ صفر ⓒ ـ ١ ⓓ غير موجودة

١٢) نهـــــا $\sqrt{|\text{س}|}$ = ...
س ← ٠

ⓐ ١ ⓑ صفر ⓒ ـ ١ ⓓ غير موجودة

١٣) **إذا كانت د دالة :**

د(س) = $\begin{cases} \dfrac{\text{جاس}}{\text{س جتا س}} & : \text{س} \neq ٠ \\ ٣ & : \text{س} = ٠ \end{cases}$

فإن $\lim_{\text{س} \to ٠}$ د (س) =............

(أ) ١ (ب) صفر (ج) ٣ (د) غير موجودة

١٤) **إذا كانت د دالة :**

د(س) = $\begin{cases} ٣\text{س} - ١ & : \text{س} > ١ \\ \text{س}^{٢} + ١ & : \text{س} < ١ \end{cases}$

فإن $\lim_{\text{س} \to ١}$ د (س) =............

(أ) ١ (ب) ٢ (ج) ٣ (د) غير موجودة

١٥) **إذا كانت د دالة :**

د(س) = $\begin{cases} \dfrac{\text{س}^{٢} - ١}{\text{س} - ١} & : \text{س} < ١ \\ \text{ك} & : \text{س} > ١ \end{cases}$

وكان $\lim_{\text{س} \to ١}$ د (س) موجودة فإن ك =....

(أ) ١ (ب) صفر (ج) ٢ (د) - ١



حلول تمارين الدرس الخامس

١) ب	٢) أ	٣) د	٤) ج	٥) أ
٦) أ	٧) ج	٨) أ	٩) د	١٠) د
١١) د	١٢) ب	١٣) د	١٤) ب	١٥) ج

الدرس السادس: الاتصال

المفاهيم الأساسية للدرس

١) اتصال الدالة عند نقطة ٢) اتصال الدالة على فترة

تكون الدالة د متصلة عندما س = ﻫ إذا تحققت الشروط الاتية معا:

(١) نهـــــا د(س) موجودة (س ← ﻫ) (٢) د(ﻫ) معرفة (٣) نهـــــا د(س) = د(ﻫ) (س ← ﻫ)

الامثلة

مثال توضيحى: لاحظ: انه

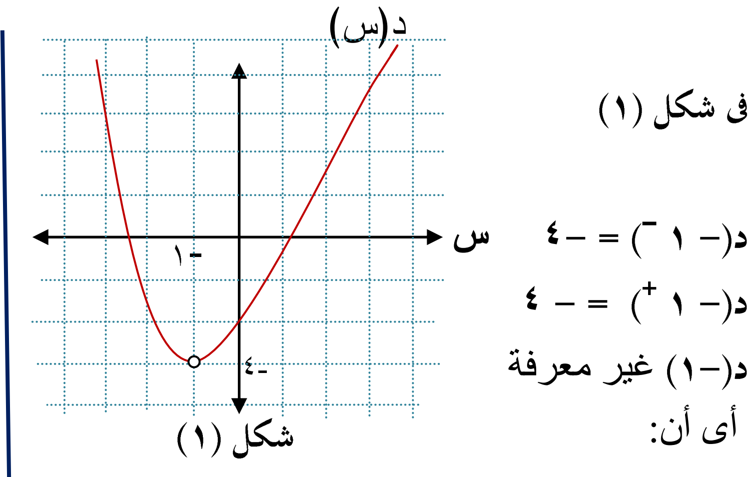
فى شكل (١)

د(–١ $^-$) = –٤

د(–١ $^+$) = – ٤

د(–١) غير معرفة

أى أن:



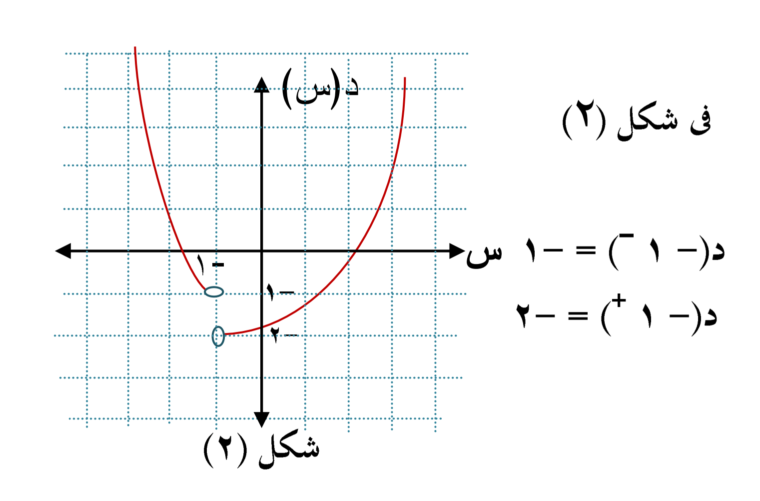
د(–١ $^-$) = د(–١ $^+$) د(–١)

∴ الدالة غير متصلة عند س= ١-

فى شكل (٢)

د(–١ $^-$) = –١

د(–١ $^+$) = –٢

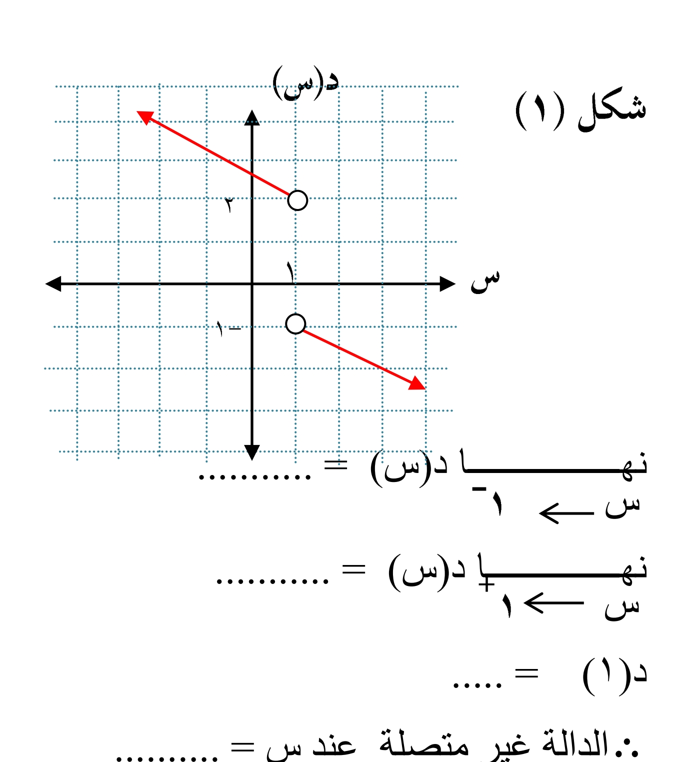


(النهاية غير موجودة) عند س= ١-

∴ الدالة غير متصلة عند س=-١

تدريب (١) فى الشكل المقابل اكمل :

شكل (١)



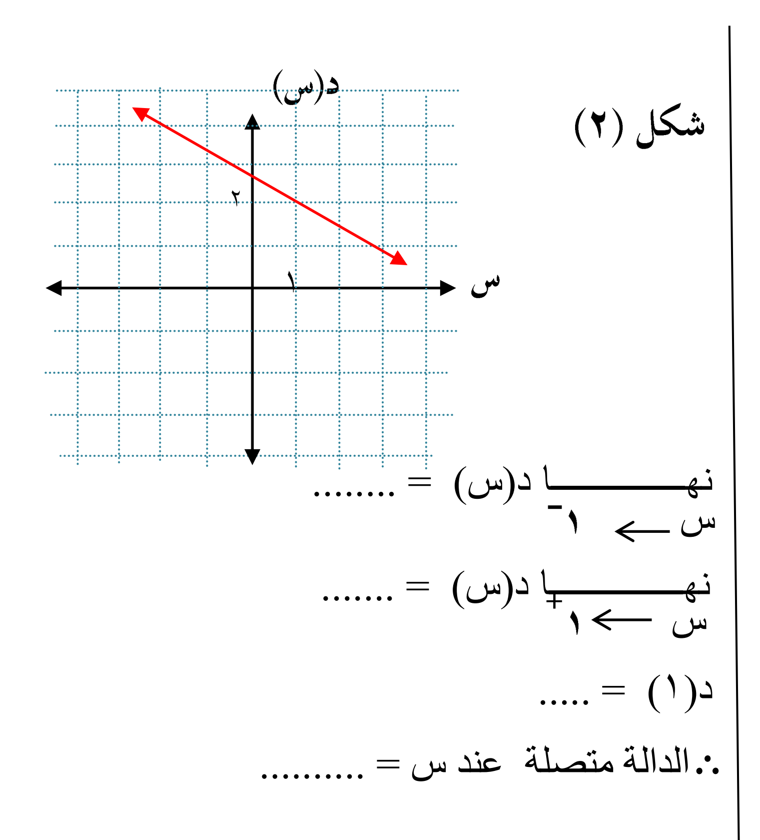
نهـــــا د(س) = ...
س ← ١⁻

نهـــــا د(س) = ...
س ← ١⁺

د(١) = ...

∴ الدالة غير متصلة عند س = ...

شكل (٢)



نهـــــا د(س) = ...
س ← ١⁻

نهـــــا د(س) = ...
س ← ١⁺

د(١) = ...

∴ الدالة متصلة عند س = ...

مثال (٢): ابحث اتصال الدالة : د(س) = { |س + ٣| / (س - ٣) عندما س ≠ -٣ ، ٥ عندما س = -٣ }

الحل:

د(س) = { س + ٣ ، س > -٣ ؛ -(س + ٣) ، س < -٣ ؛ ٥ ، س = -٣ }

د(-٣⁺) = -٣ + ٣ = ٠ ، د(-٣⁻) = -(-٣ + ٣) = ٠ ، د(-٣) = ٥

∵ د(-٣⁺) = د(-٣⁻) ≠ د(-٣) ∴ الدالة غير متصلة عند س = -٣

تدريب (٢): ابحث اتصال الدالة د(س) عندما س = صفر

$$\text{د(س)} = \begin{cases} |\text{س}| & \text{، س} < \cdot \\ \text{٢ س} & \text{، س} \geq \cdot \end{cases}$$

مثال (٣) ابحث اتصال الدالة د(س) عندما س = صفر

$$\text{د(س)} = \begin{cases} \dfrac{\text{ظا٢س}}{\text{س}} & \text{، س} > \cdot \\ \text{س} + ٢ & \text{، س} \leq \cdot \end{cases}$$

الحل

الحــــــــل

$$\text{د}(\cdot^{+}) = \underset{\text{س} \leftarrow \cdot^{+}}{\text{نهـــا}} \; \frac{\text{ظا٢س}}{\text{س}} = ٢$$

$$\text{د}(\cdot^{-}) = \underset{\text{س} \leftarrow \cdot^{-}}{\text{نهـــا}} \; \text{س} + ٢ = ٢$$

$$\text{د}(\cdot) = \cdot + ٢ = ٢$$

$\because$ د$(\cdot^{+})$ = د$(\cdot^{-})$ = د$(\cdot)$ = ٢ $\therefore$ الدالة متصلة عند س= ٠

تدريب (٣): ابحث اتصال الدالة د(س) عندما س = صفر

$$\text{د(س)} = \begin{cases} \dfrac{\text{جاس}}{\text{س}} & \text{: س} < \cdot \\ ١ & \text{: س} \geq \cdot \end{cases}$$



مثال (٤) ابحث اتصال الدالة د(س) عندما س = ١

د (س) = { ٣ س + ١ ، س ١
{ ٥ – س ، س ١

الحل

د(١⁺) = نهـــا (٥ ـ س) = ٥ ـ ١ = ٤
س ← ١⁺

د(١⁻) = نهـــا (٣س + ١) = ٣ × ١ +١ = ٤
س ← ١⁻

د(١) = ٥ ـ ١ = ٤

∵ د(١⁺) = د(١⁻) = د(١) = ٤ ∴ الدالة متصلة عند س= ٠

تدريب (٤) ابحث اتصال الدالة د(س) عندما س = ٠

د(س) = { س ، س ٠
{ س٢ ، س > ٠

اتصال دالة على فترة

إذا كانت د (س)معرفة على الفترة [٢ ، ب]. تكون الدالة د متصلة على الفترة [٢ ، ب] إذا كانت:

(١) د(س) متصلة على الفترة] ٢ ، ب [(٢) نهـــــــا د(س) = د(٢) حيث س ← ٢⁺

(٣) نهـــــــا د(س) = د(ب) حيث س ← ب⁻

بعض الدوال المتصلة:

- الدالة كثيرة الحدود متصلة على (ح) أو على مجال تعريفها.
- الدالة الكسرية متصلة على(ح) ماعدا أصفار المقام
- دالة الجيب وجيب التمام متصلة على (ح)
- دالة الظل د(س) = ظاس متصلة على ح ـ{ س: س = $\frac{b}{٢}$ + ن b ، ن ∋ ص }

الامثلة

مثال (٥): ابحث اتصال الدالة د(س) :

د(س) = { ٣ س + ٢ ، - ٣ ≤ س < ٢ ؛ س^٢ + ٤ ، ٢ س ٥ } على الفترة [ـ٣ ، ٥].

الحل

أولا: في [ـ ٣ ، ٢ [تكون د(س) = ٣ س + ٢ متصلة (كثيرة حدود)

في] ٢ ، ٥ [تكون د (س) = س^٢ + ٤ متصلة (كثيرة حدود)



ثانيا: (١) عند س=-٣ : د(-٣^{+}) = ٣(-٣) + ٢ = -٧

د(-٣) = ٣(-٣) + ٢ = -٧

∴ د(-٣)= د$(-٣)^{+}$ = -٧

∴ الدلة متصلة من جهة اليمين عندما س = -٣

(٢) عند س= ٢ : د(٢^{+}) = ٤+٤ =٨

د(٢^{-}) = ٣(٢)+٢ = ٨

د(٢) = ٤ + ٤ =٨

∵ د(٢^{+}) = د(٢^{-}) = د(٢) = ٨

∴ الدالة متصلة عند س=٢

(٣) عند س=٥ : د(٥^{-}) = $٥^{٢}$+٤ = ٢٩

د(٥) = $٥^{٢}$+٤ = ٢٩

∵ د(٥^{-}) = د(٥) = ٢٩

∴ الدلة متصلة من جهة اليسار عندما س = ٥

من أولاً و ثانيا

∴ الدالة متصلة فى الفترة [-٣ ، ٥]

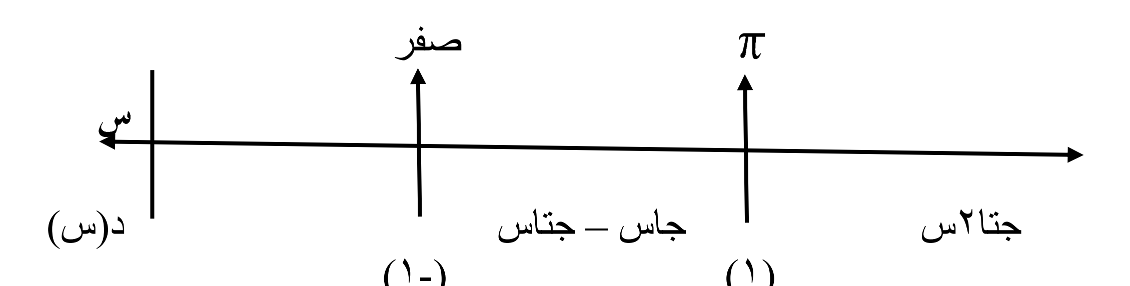
تدريب ٥ ابحث اتصال الدالة د(س) =

{ س - ٢ ، ٠ س ٣
{ $س^{٢}$ ، ٣ س ٥

على الفترة [٠ ، ٥]

مثال (٦): ابحث اتصال الدالة د(س) :د(س) = $\begin{cases} \text{جاس} - \text{جتاس} ، & ٠ \leq \text{س} \quad \pi \\ \text{جتا٢س} ، & \text{س} \quad \pi \end{cases}$ على الفترة] ٠ ، ∞ [

الحل



أولا: فى]٠ ، π [تكون: د(س) = جاس – جتاس متصلة

فى [π ، ∞ [تكون : د(س) = جتا٢س متصلة

ثانيا : عند س= ٠ د(٠^+) = جا(٠) – جتا (٠) = - ١

د(٠) = جا(٠) – جتا (٠) = - ١

∴ د(٠^+) = د(٠) = – ١

∴ الدلة متصلة من جهة اليمين عندما س = ٠

عند س= π د(π)= جا π - جتاπ = صفر – (-١) = ١

د(π^-) = جا π - جتا π = صفر – (-١) = ١

د(π^+)= جتا ٢ π = ١

∵ د(π^+) = د(π^-) = د(π) = ١



من أولاً وثانيا

∴ الدالة متصلة على الفترة [٠ ، ∞ [

تدريب (٦)

ابحث اتصال الدالة د(س) : د(س)=

$$\begin{cases} \dfrac{\text{س ظاس} - \text{جا}^{٢}\ ٣\text{س}}{٥\text{س}^{٢}} & \dfrac{-\pi}{٤} \quad \text{س} \quad ٠ \\[2ex] ٢\text{جتا}٢\text{س} & ٠ \quad \text{س} \quad \dfrac{\pi}{٤} \end{cases}$$

على الفترة] $\frac{\quad}{٤}$ ، $\frac{\quad}{٤}$ [

مثال (٧)

أوجد قيمة الثابت م لكى تكون الدالة متصلة على ح : د(س)=

$$\begin{cases} \dfrac{(\text{س}+٣)^{٤}-٨١}{\text{س}} & \text{س} \neq ٠ \\[2ex] \text{م} & \text{س} = ٠ \end{cases}$$

الحل

الدالة متصلة على ح فهي متصلة عند س = ٠

د(٠) = م

$$\lim_{\text{س}\to ٠} \text{د(س)} = \lim_{\text{س}\to ٠} \frac{(\text{س}+٣)^{٤}-٨١}{\text{س}} = \lim_{\text{س}+٣\to ٣} \frac{(\text{س}+٣)^{٤}-٣^{٤}}{(\text{س}+٣)-٣} = ٤\,(٣)^{٣} = ١٠٨$$

$$\because \text{د}(٠) = \lim_{\text{س}\to ٠} \text{د(س)} = ١٠٨ \qquad \therefore \text{م} = ١٠٨$$

تدريب (٧)

أوجد قيمة الثابت م لكى تكون الدالة متصلة على ح :

$$\text{د(س)} = \begin{cases} \dfrac{(\text{س}+٢)^{٤}-١٦}{\text{س}} & \text{س} \neq ٠ \\[2ex] \text{م} & \text{س} = ٠ \end{cases}$$



حلول التدريبات:

تدريب (١)

أولاً: شكل (١)

(١) ٢ **(٢)** ـ ١ **(٣)** غير معرفة ∴ الدالة غير متصلة عند س=١

ثانياً: شكل (٢)

(١) ٢ **(٢)** ٢ **(٣)** ٢ ∴ الدالة متصلة عند س=١

تدريب (٢) الدالة متصلة عند س=٠

تدريب (٣) الدالة متصلة عند س=٠

تدريب (٤) الدالة متصلة عند س=٠

تدريب (٥) الدالة متصلة على الفترة [٠ ، ٥] - { ٣ }

تدريب(٦) الدالة متصلة على الفترة] $\frac{\quad}{٤}$ ، $\frac{}{٤}$ [-{ ٠ }

تدريب(٧) م = ٣٢

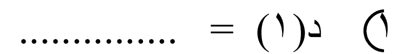


تمارين على الدرس السادس

اختر الاجابة الصحيحة

الشكل المقابل يوضح الشكل البياني للدالة د

استعن بالشكل في الاجابة عن الأسئلة من ١ : ٣



١) د(١) = ...

(أ) ١ (ب) - ٢

(ج) ٣ (د) غير معرفة



٢) $\lim\limits_{س \leftarrow ١}$ د(س) = ...

(أ) ١ (ب) - ٢

(ج) ٣ (د) غير موجودة

٣) الدالة د تكون............... عند س = ١

(أ) معرفة ولها نهاية (ب) غير معرفة ولها نهاية

(ج) معرفة وليس لها نهاية (د) غير معرفة وليس لها نهاية

٤) الدالة المتصلة عند س = ٢ فيما يلي هي د : د(س)= ....

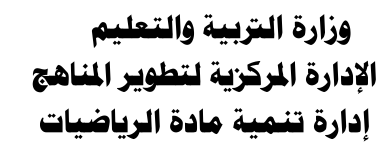
(أ) $\sqrt{س - ٢}$ (ب) $\frac{س + ٢}{س - ٢}$

(ج) جا$^{-١}$ س (د) | س – ٢ |

٥) الدالة د : د(س)= $\frac{١}{س^٢ - ٤ س + ٤}$ متصلة عند جميع قيم س الحقيقية عدا س = ...

(أ) ٢ (ب) صفر (ج) ـ ٢ (د) ٤





٦) إذا كانت الدالة د : د(س) $= \frac{١}{س^{٢} - ٤ س + ك}$ متصلة عند جميع قيم س فإن ....

(أ) ك = ٤ (ب) ك < ٤ (ج) ك > ٤ (د) ك ≠ ٤

٧) إذا كانت د دالة :

$$د(س) = \begin{cases} \frac{س - ٣}{س^{٢} - ٤ س + ٣} & : س \neq ٣ \\ ك & : س = ٣ \end{cases}$$

متصلة عند س = ٣ فإن ك = ...

(أ) صفر (ب) $\frac{١}{٢}$ (ج) ١ (د) ٢

٨) إذا كانت د دالة : متصلة عند س = ١

$$د(س) = \begin{cases} أ س - ١ & : س > ١ \\ ٢ & : س = ١ \\ س^{٢} + ب & : س < ١ \end{cases}$$

فإن أ + ب = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (ج) ٣ (د) ٤



٩) إذا كانت د دالة :

$$د(س) = \begin{cases} س^{٢} + ١ & : س < ك \\ ٢ س & : س \geq ك \end{cases}$$

متصلة على ح (مجموعة الاعداد الحقيقية) فإن ك =....

أ) صفر ب) ١ ج) ٢ د) ـ ١

١٠) إذا كانت الدالة د :

$$د(س) = \begin{cases} ٢ & : س \leq -١ \\ أ س + ب & : -١ < س < ٣ \\ -٢ & : س \geq ٣ \end{cases}$$

متصلة على ح (مجموعة الاعداد الحقيقية) فإن أ + ب = ...

أ) صفر ب) ١ ج) -١ د) ٢

حلول تمارين الدرس السادس

١) ج	٢) د	٣) ج	٤) د	٥) أ
٦) ب	٧) ب	٨) د	٩) ب	١٠) أ

تمارين عامة على الوحدة الثالثة

١) إذا كان $\lim\limits_{\text{س} \to ٢} \dfrac{\text{س}^{٢} + \text{ب س} - ٨}{\text{س} - ٢} = ٦$ فإن ب = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (ج) -٢ (د) ٦

٢) $\lim\limits_{\text{س} \to ٨} \dfrac{\sqrt{\text{س} + ١} - ٣}{\text{س} - ٨} =$ ....

(أ) $\frac{١}{٤}$ (ب) $\frac{١}{٦}$ (ج) $\frac{١}{٩}$ (د) $\frac{١}{٨}$

٣) $\lim\limits_{\text{س} \to \pi} \dfrac{\text{جتا}^{٥}\text{س} + ١}{\text{جتا س} + ١} =$ ....

(أ) ١ (ب) -١ (ج) -٥ (د) ٥

٤) $\lim\limits_{\text{س} \to ١} \left(\dfrac{\text{س}}{\text{س}^{٣} - ١} - \dfrac{١}{\text{س}^{٣} - ١} \right) =$ ....

(أ) صفر (ب) $\frac{١}{٣}$ (ج) ١ (د) ٣

٥) إذا كان $\lim\limits_{\text{س} \to ٢} \dfrac{\text{أ س}^{٢} + \text{ب س} + ٦}{\text{س} - ٢} = -١$ فإن أ + ب = ...

(أ) صفر (ب) ١ (ج) -٤ (د) -٥

٦) $\lim\limits_{\text{س} \to 1} \dfrac{\text{س}^{101} + \text{س}^{51} - 2}{\text{س} - 1} =$ ....

(أ) ١٠١ (ب) ٥١ (ج) ١٥٢ (د) ١٥٠

٧) $\lim\limits_{\text{س} \to 1} \dfrac{3\text{س}^{5} + 5\text{س}^{3} - 8}{\text{س} - 1} =$ ....

(أ) ١٥ (ب) ٢٤ (ج) ٣٠ (د) ٣٢

٨) $\lim\limits_{\text{س} \to 1} \dfrac{\text{س}^{11} + 5\text{س}^{7} - 6}{\text{س} - 1} =$ ....

(أ) ١١ (ب) ٧ (ج) ٧٧ (د) ٤٦

٩) إذا كان $\text{د(س)} = \text{س}^{9} + 1$ فإن $\lim\limits_{\text{س} \to 1} \dfrac{\text{د(س)} - \text{د(1)}}{\text{س} - 1} =$ ....

(أ) ٩ (ب) ٨ (ج) ١ (د) صفر

١٠) $\lim\limits_{\text{س} \to \infty} \dfrac{4\text{س}^{2} + 3\text{س}}{2\text{س}^{2} - 1} =$ ....

(أ) ٢ (ب) $\frac{1}{2}$ (ج) صفر (د) ∞

١١) إذا كان $\lim\limits_{\text{س} \to \infty} \dfrac{\text{أ}\text{س}^{2} + \text{ب}\text{س} + 2}{3\text{س} + 1} = 4$ فإن أ + ب = ...

(أ) صفر (ب) ٤ (ج) ٨ (د) ١٢

١٢) $\lim\limits_{\text{س} \to \infty} (١ + \text{س}^{٢} - \text{س}^{٣}) =$ ....

(أ) صفر (ب) ١ (ج) ∞ (د) $-\infty$

١٣) $\lim\limits_{\text{س} \to \infty} \dfrac{\sqrt{\text{س}^{٢} + ٢\text{س} + ١}}{|\text{س} + ١|} =$ ....

(أ) صفر (ب) ١ (ج) ∞ (د) $-\infty$

١٤) $\lim\limits_{\text{س} \to -١} \dfrac{\sqrt{\text{س}^{٢} + ٢\text{س} + ١}}{|\text{س} + ١|} =$ ....

(أ) صفر (ب) ١ (ج) ∞ (ء) $-\infty$

١٥) $\lim\limits_{\text{س} \to ٠} \dfrac{\text{جا}^{٢}\text{س} + \text{س ظا س}}{٢\text{س}^{٢}} =$ ....

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) ٢ (ج) ١ (د) صفر

١٦) $\lim\limits_{\text{س} \to ٠} \dfrac{\text{س} + \text{ظا}^{٢}\text{س}}{\text{س}} =$ ....

(أ) صفر (ب) ١ (ج) -١ (د) غير موجودة

١٧) $\lim\limits_{\text{س} \to ٠} \dfrac{\text{ظا ٢س جا ٤س جتا ٦س}}{٨\text{س}^{٢}} =$ ....

(أ) صفر (ب) ١ (ج) ٤ (د)

١٨) $\lim\limits_{س \to 0} \frac{\text{حا } س - \text{جا } س \text{ جتا } س}{س^2} = ...$

(أ) صفر (ب) ١ (ج) ٢ (د) $\frac{1}{2}$

١٩) $\lim\limits_{س \to 0} \frac{1 + 2 \text{ جتا } س - 3 \text{ جتا}^2 س}{س} = ...$

(أ) صفر (ب) ١ (ج) ٢ (د) ـ ١

٢٠) إذا كانت د دالة :

$$د(س) = \begin{cases} 4س + 1 & : س > 1 \\ 3 & : س = 1 \\ 3س^2 + 2 & : س < 1 \end{cases}$$

فإن $\lim\limits_{س \to 1} د(س) = ...$

(أ) ٥ (ب) ٣ (ج) صفر (د) غير موجودة

اسئلة المقال

١) عين قيمة أ التي تجعل الدالة د :

$$د(س) = \begin{cases} أ\ س^2 + 1 & : س \geq 1 \\ 3س - 1 & : س < 1 \end{cases}$$

متصلة عند س = ١

٢) ابحث اتصال الدالة د: عند س =٠ :

$$د(س) = \begin{cases} \frac{١}{س} \text{ حا س} & : س \neq ٠ \\ ١ & : س = ٠ \end{cases}$$

٣) إذا كان $\lim\limits_{س \to ٥} \frac{س^٢ + ك س - ٢٠}{س - ٥} = ل$ فأوجد قيمتي ك ، ل

٤) إذا كانت د دالة متصلة على ح :

$$د(س) = \begin{cases} ٣س + ك & : س < -١ \\ س^٢ - ك & : -١ \leq س \leq ٢ \\ ٢ ل & : س > ٢ \end{cases}$$

فأوجد قيمتي ك ، ل



حلول التمارين العامة

حلول الاسئلة الموضوعية

١) ب	٢) ب	٣) د	٤) ب	٥) جـ
٦) جـ	٧) جـ	٨) د	٩) أ	١٠) أ
١١) د	١٢) د	١٣) ب	١٤) ب	١٥) جـ
١٦) ب	١٧) ب	١٨) أ	١٩) أ	٢٠) أ

حلول الاسئلة المقالى

١) ١

٢) الدالة متصلة عند س = صفر

٣) ك = − ١ ، ل = ٩

٤) ك = ٢ ، ل = ١



الصف الثاني – القسم العلمي - الاختبار الاول على الوحدة الثالثة

اولا: الاسئلة الموضوعية :

في البنود من (١ : ١٠) لكل بند أربع خيارات احداها فقط صحيحة ظلل دائرة الاختيار الصحيح

١) إذا كان $\lim_{س \to ١}$ د(س) = ٣ ، $\lim_{س \to ١}$ ر(س) = ـ ٤ فإن

$\lim_{س \to ١}$ [د(س) ـ ر(س)]^{٢} = ...

ⓐ ١ ⓑ ٧ ⓒ ٢٥ ⓓ ٤٩

٢) $\lim_{س \to ٧^{-}} \frac{|س - ٧|}{س - ٧}$ =................

ⓐ ـ ١ ⓑ ١ ⓒ ٧ ⓓ غير موجودة

٣) $\lim_{س \to ٣^{+}} \frac{\sqrt{س - ٣}}{س}$ =................

ⓐ ١ ⓑ صفر ⓒ $\frac{١}{٣}$ ⓓ غير موجودة

٤) $\lim_{س \to ٠} \frac{٣ س}{جا ٥س}$ =................

ⓐ صفر ⓑ ١ ⓒ $\frac{٣}{٥}$ ⓓ $\frac{٥}{٣}$

٥) $\lim\limits_{س \to \infty} \dfrac{٥س + ٣}{\sqrt{٤س^{٢} - ٣}}$ = ...

(أ) صفر (ب) $\frac{٥}{٢}$ (ج) $\frac{٥}{٤}$ (د) غير موجودة

٦) $\lim\limits_{س \to \frac{١}{٢}\pi} \dfrac{جا\ س}{س}$ = ...

(أ) صفر (ب) ١ (ج) $\frac{١}{٢}\pi$ (د) $\dfrac{٢}{\pi}$

٧) $\lim\limits_{س \to ٠} \dfrac{\sqrt{س^{٢} + ٤} - ٢}{س^{٢}}$ = ...

(أ) صفر (ب) $\frac{١}{٤}$ (ج) $\frac{١}{٢}$ (د) غير موجودة

٨) $\lim\limits_{س \to -١} \dfrac{٥س^{٣} + ٤س^{٢} + ١}{س + ١}$ = ...

(أ) صفر (ب) -١ (ج) ٧ (د) -٧

٩) $\lim\limits_{س \to -٣} \dfrac{س^{٢} - ٤س - ٢١}{س + ٣}$ = ...

(أ) صفر (ب) -٣ (ج) -٧ (د) -١٠



١٠) $\lim\limits_{س \to \sqrt{٢}} \frac{س^٢ - ٢}{س^٣ - ٢\sqrt{٢}} =$ ....

Ⓐ صفر Ⓑ $\frac{٢}{٣}$ Ⓒ $\frac{\sqrt{٢}}{٣}$ Ⓓ $\sqrt{٢}$

ثانيا : الاسئلة المقال :

١) عين قيم ك التي تجعل الدالة د متصلة على ح :

$$د(س) = \frac{٧}{س^٢ + ك س + ٤}$$

٢) إذا كانت

$$د(س) = \begin{cases} ٥س - ك & : س \leq ١ \\ ٤ ك & : س > ١ \end{cases}$$

وكان $\lim\limits_{س \to ١}$ د(س) موجودة فأوجد قيمة ك

حل الاختبار الأول على الوحدة الثالثة (القسم العلمى)

اولا: الاسئلة الموضوعية :

١) د ٢) أ ٣) ب ٤) ج ٥) ب

٦) د ٧) ب ٨) ج ٩) د ١٠) ج

ثانيا : الاسئلة المقال :

١) ك ∋] -٤ ، ٤ [٢) ك = ١



الصف الثاني – القسم العلمي - الاختبار الثاني على الوحدة الثالثة

اولا: الاسئلة الموضوعية :

في البنود من (١ : ١٠) لكل بند أربع خيارات احداها فقط صحيحة ظلل دائرة الاختيار الصحيح

١) إذا كان $\lim_{\text{س} \to ١} \frac{\text{س}^{١٠٠} + \text{س}^{٥٠} + \text{ك}}{\text{س} - ١} = ١٥٠$ فإن ك = ...

(أ) ١   (ب) ـ ١   (ج) ٢   (د) ـ ٢

٢) $\lim_{\text{س} \to ١} \frac{\text{س}^{٢} - ١}{|\text{س} - ١|} =$ ....

(أ) ـ ١   (ب) ٢   (ج) ـ٢   (د) غير موجودة

٣) $\lim_{\text{س} \to ٥} \frac{٣ - \sqrt{\text{س} + ٤}}{\text{س} - ٥} =$ ....

(أ) $-\frac{١}{٦}$ (ب) $\frac{١}{٦}$ (ج) $\frac{١}{٣}$ (د) $-\frac{١}{٣}$

٤) $\lim_{\text{س} \to ٠} \frac{\text{س ظا س}}{١ - \text{جتا}^{٢}\, ٣\,\text{س}} =$ ....

(أ) $-\frac{١}{٩}$ (ب) $\frac{١}{٩}$ (ج) $\frac{١}{٣}$ (د) $-\frac{١}{٣}$

٥) $\lim_{س \to \infty} \left(\frac{س^{٣}}{س^{٢} + ٢} - س \right) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$

ⓐ صفر　　ⓑ ∞　　ⓒ $-\infty$　　ⓓ غير موجودة

٦) $\lim_{س \to ١} \frac{٣س^{٥} + ٥ س^{٣} - ٨}{س - ١} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$

ⓐ ٨　　ⓑ ١٥　　ⓒ ٣٠　　ⓓ غير موجودة

٧) $\lim_{س \to \infty} \frac{س(س+١)(٢ س+٣)(٣س+٤)(٤س+٥)}{١٢س^{٥}} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$

ⓐ صفر　　ⓑ ١　　ⓒ ٢　　ⓓ $\frac{١}{٢}$

٨) $\lim_{س \to ١} \frac{ظا(س-١)}{\sqrt{س} - ١} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$

ⓐ ١　　ⓑ -١　　ⓒ ٢　　ⓓ -٢

٩) $\lim_{س \to ١} \frac{س^٣ - ٢ س^٢ + س}{س^٢ - ١}$ = ...

(أ) صفر (ب) ١ (ج) ٣ (د) ٤

١٠) أذا كانت د(س) = $\frac{س}{س^٢ - ١}$ فإن الدالة د تكون غير متصلة عندما

س ∈ ....

(أ) { ٠ ، ١ } (ب) { ٠ ، ١ } (ج) { -١ ، ١ } (د) { ٠ ، -١ ، ١ }

ثانيا : الاسئلة المقال :

١) عين قيم ك التي تجعل الدالة د متصلة عند س = ٣ حيث

$$د(س) = \begin{cases} \frac{س^٢ - ٩}{س - ٣} & : س \neq ٣ \\ ك & : س = ٣ \end{cases}$$

---

٢) إذا كان $\lim_{س \to ١} \frac{س^٢ + ل س + ك}{س - ١} = ٣$ فعين قيمتي ك ، ل .



حل الاختبار الثاني على الوحدة الثالثة (القسم العلمى)

اولا: الأسئلة الموضوعية :

١) د	٢) د	٣) أ	٤) ب	٥) أ
٦) جـ	٧) جـ	٨) جـ	٩) أ	١٠) جـ

ثانيا : الأسئلة المقال :

١) ك = ٦   ٢) ك = ـ ٢ ، ل = ١



رياضيات
الصف الثانى الثانوى (علمى)
الوحدة الرابعة(حساب المثلثات)

المحتويات



الصف الثاني الثانوي – القسم العلمي
الوحدة الرابعة – حساب المثلثات

الدرس الأول: قانون (قاعدة) الجيب

المفاهيم الاساسية للدرس:

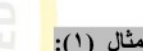
فى المثلث ا ب جـ استخدمنا الرموز اَ ، بَ ، جـَ للدلالة على أطوال الاضلاع المقابلة للزوايا ا، ب ، جـ على الترتيب كما بالشكل المقابل.

قاعدة الجيب

فى أى مثلث تتناسب أطوال أضلاع المثلث مع جيوب الزوايا المقابلة

أي أن : $\frac{\text{اَ}}{\text{جا ا}} = \frac{\text{بَ}}{\text{جا ب}} = \frac{\text{جـَ}}{\text{جا جـ}}$

أمثلة محلولة



مثال (١):

ا ب جـ مثلث فيه ق (∠ ا) = ٤٤ ° , ق (∠ ب) = ٥٦ ° ، جـَ = ٥,٦ سم أوجد اَ لأقرب رقمين عشريين.

الحل :

ق(∠ جـ) = ١٨٠ ° – (٤٤° + ٥٦ °) = ٨٠ °

∵ $\frac{\text{اَ}}{\text{جا ٤٤}} = \frac{\text{بَ}}{\text{جا ٥٦}} = \frac{\text{٥,٦}}{\text{جا ٨٠}}$

∴ اَ = $\frac{\text{٥,٦} \times \text{جا ٤٤°}}{\text{جا ٨٠ °}} \simeq$ ٣,٩٥ سم

تدريب (١)

س ص ع مثلث فيه ق (∠ س) = ٤٦ ° ، ق (∠ ص) = ٨٥ ° ، عَ = ٤,٨ سم أوجد سَ لأقرب رقم عشرى.



مثال (٢):

اب جـ مثلث فيه ق (∠ أ) = ٤٧ ° ، ق (∠ جـ) = ٥٦ ° ، إذا كان محيط المثلث = ٣٠ سم أوجد أ َ لأقرب رقم عشري .

الحل :

ق (∠ ب) = ١٨٠ ° – (٤٧° + ٥٦ °) = ٧٧ °

∵ أ َ / جا ٤٧ = ب َ / جا ٧٧ = جـ َ / جا ٥٦ = (أ َ + ب َ + جـ َ) / (جا ٤٧ + جا ٧٧ + جا ٥٦) = ٣٠ / ٢,٥٣

∴ أ َ = (٣٠ × جا ٤٧ °) / ٢,٥٣ ≃ ٨,٧ سم

تدريب (٢)

اب جـ مثلث فيه ق (∠ ب) = ٥٥ ° ، ق (∠ جـ) = ٧٧ ° ، إذا كان محيط المثلث = ٨٠ سم أوجد ب َ لأقرب رقم عشري

تمرين مشهور

فى أى مثلث أ ب جـ يكون : أ َ / جا أ = ب َ / جا ب = جـ َ / جا جـ = ٢ نق

حيث نق طول نصف قطر الدائرة الخارجه للمثلث أ ب جـ .

مثال (٣):

اب جـ مثلث فيه ق (∠ أ) = ٥٥ ° , ق (∠ ب) = ٧٤ ° ، جـ َ = ٨,٦ سم أوجد :

١) طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث إب جـ ٢) مساحة سطح المثلث إب جـ

الحل

ق(∠ جـ) = ١٨٠ ° – (٥٥° + ٧٤ °) = ٥١ °

أ َ / جا ٥٥ = ب َ / جا ٧٤ = ٨,٦ / جا ٥١ = ٢ نق ∴ نق = ٨,٦ / جا ٥١ ÷ ٢ = ٥,٥ سم

$أ = \frac{٨,٦ \times جا ٥٥°}{جا ٥١°}$: ٩,١ سم

مساحة سطح المثلث إب جـ = $\frac{١}{٢} \times أ \times جـ \times جا ب$ = $\frac{١}{٢} \times ٩,١ \times ٨,٦$ جا ٧٤ °

= ٣٧,٦ سم ²

تدريب (٣):

إب جـ مثلث فيه ق (∠ أ) = ٥٠ ° ، ق (∠ ب) = ٣٥ ° ، جـ = ١٢سم أوجد :

١) طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث إب جـ ٢) مساحة سطح المثلث إب جـ

مثال (٤):

فى الشكل المقابل إذا كان طول قطر الدائرة م يساوي ١٠سم ، ق (∠ ب م جـ) = ١٢٠ °

أوجد أ

الحل

ق (∠ ب أ جـ) = $\frac{١}{٢}$ ق (∠ ب م جـ) = ١٢٠° ÷ ٢ = ٦٠ °

قياس الزاوية المحيطية تساوى نصف قياس الزاوية المركزية المشتركة معها فى نفس القوس

∵ $\frac{أ}{جا ٦٠} = ١٠$ ∴ أ = ١٠ جا ٦٠ = ٥$\sqrt{٣}$ سم

تدريب (٤):

أ وجد محيط الدائرة المارة برؤوس المثلث إب جـ المتساوى الاضلاع الذى طول ضلعه ٦ سم

مثال (٥):

إذا كان محيط الدائرة الخارجة للمثلث أ ب جـ يساوى ١٠ π سم ، ق ($\angle$ ب) = ١٢٠ °

فأوجد ب َ

الحل

محيط الدائرة = ٢ π نق = ١٠ π ∴ نق = ٥ سم

∵ $\frac{\text{ب َ}}{\text{جا ب}}$ = ٢ نق

∴ $\frac{\text{ب َ}}{\text{جا ١٢٠}}$ = ١٠ ∴ ب َ = ١٠ جا ١٢٠ = ٥ $\sqrt{3}$ سم

تدريب (٥):

إذا كان محيط الدائرة الخارجة للمثلث أ ب جـ يساوى ٨ π سم ، ق ($\angle$ جـ) = ٣٠ °

فأوجد جـ َ

مثال (٦):

فى المثلث أ ب جـ الذى فيه ق ($\angle$ أ) = ٦٠ ° ، أ َ = ٢١ سم ، أوجد مساحة سطح الدائرة المارة برؤوس المثلث أ ب جـ ، حيث $\pi \simeq \frac{22}{7}$

الحل

∵ $\frac{\text{أ َ}}{\text{جا أ}}$ = ٢ نق ∴ $\frac{٢١}{\text{جا ٦٠}}$ = ٢ نق

∴ نق = $\frac{٢١}{\text{جا ٦٠}}$ ÷ ٢ = ٧ $\sqrt{3}$ سم

∴ مساحة سطح الدائرة = π نق ٢ = $\frac{22}{7}$ × (٧ $\sqrt{3}$)٢ = ٤٦٢ سم ٢



تدريب (٦):

فى المثلث أ ب جـ الذى فيه ق (∠ أ) = ٣٠ ° ، أَ = ١٤ سم ، أوجد طول مساحة سطح الدائرة المارة برؤوس المثلث حيث $\pi \simeq \frac{٢٢}{٧}$



حل المثلث بأستخدام قانون الجيب

ملاحظة
يتكون المثلث من ستة عناصر هي :
١) ثلاثة أضلاع.
٢) ثلاث زوايا

المقصود بحل المثلث هو إيجاد قيم عناصره المجهولة

أولا : حل المثلث بمعلومية طول أحد أضلاعه وقياس زاويتين

مثال (٧):

حل المثلث أ ب جـ الذى فيه ق (∠ أ) = ١٠٠ ° ، ق (∠ جـ) = ٢٣ ° ، أَ = ٨,٤ سم

الحل :

ق(∠ ب) = ١٨٠ ° − (١٠٠° + ٢٣ °) = ٥٧ °

∵ $\frac{٨,٤}{\text{جا}١٠٠} = \frac{\text{ب}َ}{\text{جا}٥٧} = \frac{\text{جـ}َ}{\text{جا}٢٣}$

∴ بَ = $\frac{٨,٤ \times \text{جا}\ ٥٧°}{\text{جا}\ ١٠٠°}$ = ٧,١٥ سم ، جـَ = $\frac{٨,٤ \times \text{جا}\ ٢٣°}{\text{جا}\ ١٠٠°}$ = ٣,٣٣ سم

تدريب (٧):

حل المثلث أ ب جـ الذى فيه ق (∠ أ) = ٣٢ ° ، ق (∠ ب) = ٤٥ ° ، أَ = ٦,٢ سم

ثانيا : حل المثلث بمعلومية طولى ضلعين فيه وقياس الزاوية المقابلة لأحدهما (الحالة المبهمة).

➢ **طريقة تحديد عدد حلول المثلث الممكنة باستخدام قاعدة الجيب.**

تذكر أن:

-١ ≥ جاس ≥ ١

بفرض معرفة قيمة كل من ٠ أَ ، بَ ، ق (∠ أ)

∴ $\frac{\text{أَ}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{بَ}}{\text{جا ب}}$ ، جا ب = $\frac{\text{بَ جا أ}}{\text{أَ}}$

يوجد ثلاث حالات مختلفة لقيم جا ب

الحالة الأولى: إذا كان جا ب > ١ (مرفوض) ∴ (لا يوجد حل للمثلث على الاطلاق)

الحالة الثانية: إذا كان جا ب = ١ فإن : ق(∠ ب) = ٩٠ ° يوجد حل وحيد للمثلث

الحالة الثالثة: إذا كان جا ب < ١ فإنه يوجد قياسين لزاوية ب إحداهما حادة والأخرى منفرجة (المكملة لها) .فإذا كان:

١) أَ > بَ فإن عدد حلول المثلث هو عدد قياسات (∠ ب) التي تحقق الشرط : ق(∠ أ) > ق(∠ ب) .

٢) أَ < بَ فإن عدد حلول المثلث هو عدد قياسات (∠ ب) التي تحقق الشرط : ق(∠ أ) + ق(∠ ب) < ١٨٠° .

تذكر أن:
❖ أكبر ضلع في المثلث في الطول يقابل أكبر زاوية في المثلث في القياس.

ملحوظة هامة:
في الحالات الثلاث السابقة يجب مراعاة أن: " مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة تساوى ١٨٠ ° "

مثال (٨):

اوجد عدد الحلول الممكنة للمثلث س ص ع الذى فيه ق(∠ س) = ٦٢° ، سَ = ٨ سم ، صَ = ١٠ سم

الحل :

∵ $\frac{٨}{\text{جا ٦٢}} = \frac{١٠}{\text{جا ص}}$ ∴ جا ص = $\frac{١٠ \times \text{جا ٦٢}°}{٨}$ = ١,١٠٣ > ١ (مرفوض)

∴ لا يوجد حل للمثلث س ص ع



تدريب (٨):

اوجد عدد الحلول الممكنة للمثلث س ص ع الذى فيه ق(∠ س) = ٥٠° ، سَ = ٤ سم ، صَ = ٧ سم

مثال (٩):

بين ما إذا كان للمثلث إب جـ الذى فيه ق(∠ ب) = ٢٢َ ٥٠° ، جـَ = ٨,٤ سم ، بَ = ٧,٢ سم

حل وحيد ، أم حلان ، أم ليس له حل ، ثم أوجد الحلول الممكنه إذا وجدت





الحل :

تحديد عدد حلول المثلث

∵ جـَ > بَ ∴ ق (∠ جـ) > ق (∠ ب)

∵ ٧,٢ / حا ٢٢َ ٥٠° = ٨,٤ / جا جـ ∴ جا جـ = ٨,٤ × جا ٢٢َ ٥٠° / ٧,٢ = ٠,٨٩٨

∴ ق (∠ جـ) = ٤٢ً ٥٧َ ٦٣° (مقبول)

ق(∠ جـ) = ١٨٠ ـ ٤٢ً ٥٧َ ٦٣° = ١٨ً ٢َ ١١٦° (مقبول)

∴ يوجد حلان للمثلث إب جـ وهما كالتالى:

الحل الاول

∵ ق (∠ جـ) = ٤٢ً ٥٧َ ٦٣° ، ق(∠ ب) = ٢٢َ ٥٠°

∴ ق (∠ أ) = ١٨٠° - (٤٢ً ٥٧َ ٦٣° + ٢٢َ ٥٠°) = ١٨ً ٤٠َ ٦٥°

∵ ٧,٢ / حا ٢٢َ ٥٠° = أَ / حا ١٨ً ٤٠َ ٦٥° ∴ أَ = ٧,٢ × جا ١٨ً ٤٠َ ٦٥° / جا ٢٢َ ٥٠° : ٨,٥٢ سم

الحل الثانى

∵ ق (∠ جـ) = ١٨٠ ° - ٤٢ ″ ٥٧ ′ ٦٣ ° = ١٨ ″ ٢ ′ ١١٦ °

∴ ق (∠ أ) = ١٨٠ ° - (١٨ ″ ٢ ′ ١١٦ ° + ٢٢ ′ ٥٠ °) = ٤٢ ″ ٣٥ ′ ١٣ °

∵ ٧,٢ / جا ٢٢ ′ ٥٠ ° = أ′ / جا ٤٢ ″ ٣٥ ′ ١٣ ° ∴ أ′ = ٧,٢ × جا ٤٢ ″ ٣٥ ′ ١٣ ° / جا ٢٢ ′ ٥٠ ° ٢,٢ سم

تدريب (٩):

اوجد عدد الحلول الممكنة للمثلث إب جـ الذى فيه ، ق(∠ أ) = ٤٢ ° ، أ′ = ١٣ سم ، ب′ = ١٧ سم ، ثم أوجد الحلول الممكنه إذا وجدت

مثال (١٠):

اوجد عدد الحلول الممكنة للمثلث أ ب جـ الذى فيه ق (∠ أ) = ١١٥ ° ، أ′ = ٧ سم ، ب′ = ٤ سم

الحل

∵ أ′ > ب′ ق (∠ أ) > ق (∠ ب)

∵ ٧ / جا ١١٥ ° = ٤ / جا ب ∴ جا ب = ٤ × جا ١١٥ ° / ٧ = ٠,٥١٧٨

∴ ق (∠ ب) = ٢٧ ″ ١١ ′ ٣١ ° **(مقبول)**

ق(∠ ب) = ١٨٠ _ ٢٧ ″ ١١ ′ ٣١ ° = ٣٣ ″ ٤٨ ′ ١٤٨ ° **(مرفوض)**

تذكر أن:
مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة تساوى ١٨٠ °

∴ يوجد حل وحيد للمثلث أ ب جـ

تدريب (١٠):

اوجد عدد الحلول الممكنة للمثلث أ ب جـ الذى فيه ق(∠ أ) = ١٢٥ ° ، أ′ = ٩ سم ، ب′ = ٦ سم .



مثال (١١):

اوجد عدد الحلول الممكنة للمثلث أ ب جـ الذى فيه ق (∠ أ) = ٦٠° ، أَ = ٩ سم ، بَ = ٦$\sqrt{٣}$ سم

لحل

∵ أَ > بَ ق (∠ أ) > ق (∠ ب)

∵ $\frac{٩}{\text{جا } ٦٠°} = \frac{٦\sqrt{٣}}{\text{جا ب}}$ ∴ جا ب = $\frac{٦\sqrt{٣} \times \text{جا } ٦٠°}{٩}$ = ١

∴ ق (∠ ب) = ٩٠° **∴يوجد حل وحيد للمثلث أ ب جـ**

تدريب (١١):

اوجد عدد الحلول الممكنة للمثلث أ ب جـ الذى فيه ق (∠ أ) = ٦٠° ، أَ = ١٢ سم ، بَ = ٨$\sqrt{٣}$ سم



حلول التدريبات على قانون الجيب:

حل تدريب (١): سَ = ٦و٤ سم

حل تدريب (٢): بَ = ٨و٢٥ سم

حل تدريب (٣): نق= ١٢ سم ، مساحة سطح المثلث أب جـ = ٣١,٦٦ سم٢

حل تدريب (٤): محيط الدائرة = ٤ $\sqrt{3}$ π سم

حل تدريب (٥): جـَ = ٤ سم

حل تدريب (٦): مساحة سطح الدائرة = ٦١٦ سم٢

حل تدريب (٧): ق (∠ جـ) = ١٠٣° ، بَ = ٨,٣ سم ، جـَ = ١١,٤ سم

حل تدريب (٨): لا يوجد حل للمثلث س ص ع

حل تدريب (٩): يوجد حلان للمثلث أ ب جـ

الحل الأول : ق (∠ ب) = ٤٩ً ٤َ ٦١° ، ق (∠ جـ) = ١١ً ٥٧َ ٧٦° ، جـَ = ١٨,٩ سم

الحل الثانى : ق (∠ ب) = ١١ً ٥٧َ ١١٨° ، ق (∠ جـ) = ٤٩ً ٤َ ١٩° ، جـَ = ٦,٣سم

حل تدريب (١٠): يوجد حل وحيد للمثلث أ ب جـ

حل تدريب (١١): يوجد حل وحيد للمثلث أ ب جـ



تمارين على قانون الجيب

اختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاه

١) فى المثلث أ ب جـ يكون المقدار أَ جا جـ مساويا ....

أ) أَ جا أ ب) بَ جا ب جـ) جـَ جا أ د) بَ جا أ

٢) طول قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث أ ب جـ الذى فيه ق (∠ ب) = ٣٠ ° ، بَ = ٥سم يساوى ....

أ) ٥ ب) ١٠ جـ) ١٥ د) ٢٠

٣) فى المثلث د هـ و إذا كان : $\frac{١}{٢}$ جا د = $\frac{١}{٣}$ جا هـ = $\frac{١}{٤}$ جا و فإن:

دَ : هـَ : وَ = ... : ...... : ......

أ) ٢:٣:٤ ب) ٤:٣:٢ جـ) ٢:٤:٣ د) ٤:٢:٣

٤) فى المثلث أ ب جـ إذا كان ٢جا أ = ٣ جا ب = ٤ جا جـ فإن :

أَ : بَ : جـَ = ... : ...... : ......

أ) ٣:٤:٦ ب) ٢:٣:٤ جـ) ٤:٣:٢ د) ٦:٤:٣

٥) فى المثلث أ ب جـ إذا كان ق (∠ أ) = ١٠٣°، أَ = ٧سم ، بَ = ٤ سم فيكون ......

أ) له حل وحيد ب) له حلان جـ) له ثلاثة حلول د) ليس له حل

٦) فى المثلث أ ب جـ إذا كان ق (∠ أ) = ٤٦ ° ، أَ = ٤سم ، بَ = ٧ سم فيكون ....

أ) له حل وحيد ب) له حلان جـ) له ثلاثة حلول د) ليس له حل

٧) فى المثلث أ ب جـ إذا كان ق (∠ أ) = ٣٨° ، أ َ =١٠سم ، ب َ = ١٥ سم فيكون……

أ) له حل وحيد ب) له حلان جـ) له ثلاثة حلول د) ليس له حل

٨) فى المثلث أ ب جـ إذا كان $\frac{٣}{جا أ}$ = $\frac{٤}{جا ب}$ = $\frac{٥}{٢جا جـ}$

فإن أ َ : ب َ : جـ َ = ……: …… : ……

أ) ٣:٤:٥ ب) ٦:٨:٥ جـ) ٥:٨:٦ د) ٣:٤:٥

٩) فى المثلث س ص ع إذا كان ق (∠ س) : ق (∠ ص) : ق (∠ ع) = ٢ : ٣ : ٤ ،

س َ = ٧,٥ سم فإن مساحة سطح المثلث ≃ …… سم ٢

أ) ٣٧ ب) ٧٤ جـ) ٢٤ د) ٣٢

١٠) مساحة سطح المثلث أ ب جـ = جا أ جا ب جا جـ × ……

أ) ٤ نق ٢ ب) ٢ نق جـ) ٢ نق ٢ د) نق ٢

حيث نق طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث

اجابة التمارين

١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
جـ	ب	أ	د	أ	د	ب	ب	أ	جـ



الدرس الثانى: قانون (قاعدة) جيب التمام

سوف نتعلم :(١) قانون أو قاعدة جيب التمام لأى مثلث

(٢) استخدام قاعدة جيب التمام فى حل المثلث

قانون (قاعدة) جيب التمام :

فى أى مثلث أ ب جـ يكون :

$$\text{أ}^2 = \text{ب}^2 + \text{جـ}^2 - ٢\ \text{ب}\ \text{جـ}\ \text{جتا أ}$$

$$\text{ب}^2 = \text{جـ}^2 + \text{أ}^2 - ٢\ \text{جـ}\ \text{أ}\ \text{جتا ب}$$

$$\text{جـ}^2 = \text{أ}^2 + \text{ب}^2 - ٢\ \text{أ}\ \text{ب}\ \text{جتا جـ}$$

ومنها :

$$\text{جتا أ} = \frac{\text{ب}^2 + \text{جـ}^2 - \text{أ}^2}{٢\ \text{ب}\ \text{جـ}} \quad ، \quad \text{جتا ب} = \frac{\text{جـ}^2 + \text{أ}^2 - \text{ب}^2}{٢\ \text{جـ}\ \text{أ}} \quad ، \quad \text{جتا جـ} = \frac{\text{أ}^2 + \text{ب}^2 - \text{جـ}^2}{٢\ \text{ب}\ \text{أ}}$$

أمثلة محلولة

مثال (١):

أوجد قياس أكبر زاوية فى المثلث أ ب جـ حيث أ =٣ سم ، ب =٥سم ، جـ = ٧ سم

الحل :

∵أكبر زاوية في المثلث في القياس تقابل أكبر ضلع في الطول من أضلاع المثلث .

∵ جـ > ب > أ ∴ ∠ جـ هي أكبر زوايا المثلث في القياس

$$\text{جتا جـ} = \frac{\text{أ}^2 + \text{ب}^2 - \text{جـ}^2}{٢\ \text{ب}\ \text{أ}} = \frac{٣^2 + ٥^2 - ٧^2}{٢ \times ٣ \times ٥} = -\frac{١}{٢}$$

$$\therefore \text{ق}(\angle \text{جـ}) = ١٢٠°$$

تدريب (١)

ا ب جـ مثلث فيه أ = ١٢سم ، ب = ٢٠سم ، جـ = ٢٦سم أوجد قياس اصغر زاوية فى المثلث.

مثال (٢):

ا ب جـ مثلث فيه أ = ٢٠ سم ، ب = ١٥سم ، ق (∠ جـ) = ٦٠° أحسب جـ

الحل :

جـ^2 = أ^2 + ب^2 − ٢ أ ب جتا جـ

= ٢٠^2 + ١٥^2 − ٢ × ٢٠ × ١٥ جتا ٦٠° = ٣٢٥

∴ جـ = ٥ $\sqrt{١٣}$ سم

تدريب (٢)

ا ب جـ مثلث فيه أ = ٨ سم ، جـ = ٦سم ، ق (∠ ب) = ٦٠° أحسب ب

استخدام قانون جيب التمام فى حل المثلث

أولا: حل المثلث بمعلومية طولى ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما

مثال (٣)

حل المثلث ءبجـ الذى فيه ءَ = ١١ سم ، بَ = ٥سم ، ق (∠ جـ) = ٢٠°

الحل :

جـَ٢ = ءَ٢ + بَ٢ - ٢ءَ بَ جتاجـ

= ١١٢ + ٥٢ - ٢ × ١١ × ٥ جتا ٢٠° = ٤٢,٦٣ ∴ جـَ = ٦,٥٢٩ سم

∵ جتا ء = (بَ٢ + جـَ٢ - ءَ٢) / (٢بَ جـَ) = (٥)٢ + (٥٢٩ ... = -٠,٨١٧

ق (∠ ء) = ١٤٤ ٤٩َ°

ق (∠ ب) = ١٨٠° - (١٤٤ ٤٩َ° + ٢٠°) = ١٥ ١١َ°

تدريب (٣)

حل المثلث ءبجـ الذى فيه ءَ = ٢٤,٦ سم ، جـَ = ١٤,٢سم ، ق (∠ ب) = ٤٢ ١٨َ°



ثانيا: حل المثلث بمعلومية أطوال أضلاعه الثلاثة:

مثال (٤) حل المثلث ﺃ ب جـ الذى فيه أَ = ٤سم ، بَ = ٤ $\sqrt{3}$ سم ، جَ = ٨سم

الحل :

∵ جتا ﺃ = $\frac{بَ^2 + جَ^2 - أَ^2}{2 بَ جَ}$ = $\frac{(4\sqrt{3})^2 + (8)^2 - (4)^2}{2 \times 4 \sqrt{3} \times 8}$ = $\frac{\sqrt{3}}{2}$

∴ ق (∠ ﺃ) = ٣٠°

∵ جتا ب = $\frac{جَ^2 + أَ^2 - بَ^2}{2 جَ أَ}$ = $\frac{(8)^2 + (4)^2 - (4\sqrt{3})^2}{2 \times 8 \times 4}$ = $\frac{1}{2}$

∴ ق (∠ ب) = ٦٠° ∴ ق (∠ جـ) = ١٨٠° − (٦٠° + ٣٠°) = ٩٠°

تدريب (٤)

حل المثلث ﺃ ب جـ الذى فيه أَ = ١٢,٢سم ، بَ = ١٨,٤ سم ، جَ = ٢١,١سم

الحالة المبهمه لحل المثلث باستخدام قاعدة جيب التمام

مثال (٥)

حل المثلث ﺃ ب جـ الذى فيه أَ = ٦ سم ، بَ = ٧سم ، ق(∠ ﺃ) = ٣٠°

الحل :

أَ² = بَ² + جَ² − ٢ بَ جَ جتا ﺃ

٦² = ٧² + جَ² − ٢ × ٧ × جَ جتا ٣٠°

∴ جَ² − ٧ $\sqrt{3}$ جَ + ١٣ = ٠ (باستخدام القانون العام لحل المعادلة التربيعية)

∴ جَ = ١٠,٩٣٥ سم أو ١,١٨٨ سم

كل قيمة موجبة لـ جَ تقابل مثلث واحد

∴ يوجد مثلثان (حلان) يحققان الشروط السابقة .

الحل الاول

عندما جـ َ = ١٠,٩٣٥ سم

جتا ب = $\frac{(١٠,٩٣٥)^{٢}+(٦)^{٢}-(٧)^{٢}}{٢(١٠,٩٣٥)(٦)}$ = ٠,٨١٢

∴ ق (∠ ب) = ١٦ ً ٤ ٣٥ °

ق(∠ ب) = ١٨٠ ° - (٣٠ + ١٦ ً ٤ ٣٥ °) = ٥٠ ً ١٨ َ ١١٤ °

الحل الثانى

عندما جـ َ = ١,١٨٨ سم

حتا ب = $\frac{(١,١٨٨)^{٢}+(٦)^{٢}-(٧)^{٢}}{٢(١,١٨٨)(٦)}$ = - ٠,٨١٢ ∴ ق (∠ ب) = ٥٠ ً ١٨ َ ١٤٤ °

∴ ق (∠ ب) = ١٨٠ ° - (٣٠ + ٥٠ ً ١٨ َ ١٤٤ °) = ٦ ً ٤١ َ ٥ °

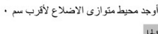
تدريب (٥)

حل المثلث ا ب جـ الذى فيه ا َ = ٨ سم ، ب َ = ١٠سم ، ق(∠ ا) = ٤٢ °

مثال (٦):

فى الشكل المقابل : م ب جـ د متوازى أضلاع فيه :

ق(∠ م ب د)=٨٠° ، ب د = ٧سم ، م ب = ٥سم



أوجد محيط متوازى الاضلاع لأقرب سم ٠

الحل

فى المثلث م ب د :

(م د)^2 = (م ب)^2 + (ب د)^2 − ٢م ب × ب د جتا د

= ٥^2 + ٧^2 − ٢ × ٥ × ٧ جتا ٨٠°

م د = ٧,٩سم

∴ محيط متوازى الاضلاع = ٢ (م د + م ب)

= ٢ (٧,٩ + ٥) ≃ ٢٦سم

تدريب (٦)

فى الشكل المقابل : م ب جـ د شكل رباعى فيه :

ق(∠ جـ م د)=٦٠° ، ق(∠ م ب جـ)=٩٠° ،

م د = ٥سم ، م ب = ٨ سم ، ب جـ = ٦ سم

أوجد محيط الشكل م ب جـ د لأقرب سم ٠



مثال (٧)

ﻡب جـ د شكل رباعى فيه : ﻡب = ٩سم ، ب جـ= ٥سم ، جـ د= ٨سم ، ﻡ د = ٩سم ،
ﻡجـ = ١١ سم ، أثبت أن الشكل ﻡب جـ د شكل رباعى دائرى ٠



الحل

فى المثلث ﻡ جـ د

$$\text{جتا د} = \frac{٩^٢ + ٨^٢ - ١١^٢}{٢ \times ٩ \times ٨} = \frac{١}{٦}$$

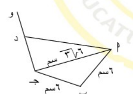
فى المثلث ﻡب جـ

$$\text{جتا ب} = \frac{٩^٢ + ٥^٢ - ١١^٢}{٢ \times ٩ \times ٥} = -\frac{١}{٦}$$

∵ جتا د = - جتا ب ∴ ى (∠ ب) + ى (∠ د) = ١٨٠°

∴ الشكل ﻡب جـ د شكل رباعى دائرى

تدريب (٧)



فى الشكل المقابل : اذا كان ﻡب جـ د شكل رباعى دائرى فيه،
ﻡ جـ = ٦√٣ سم ، ﻡ ب = ٦ سم ، ب جـ = ٦ سم
أوجد : ى(∠ ﻡ د و)



حلول التدريبات :

(١) ق (∠ أ) = ٢٦° ٢٠′ ٣٤″

(٢) بَ = ٧,٢ سم

(٣) بَ = ١٧ سم ، ق (∠ جـ) = ٣٤° ٦′ ٣٠″ ، ق (∠ أ) = ١٠٣° ٤٥′ ٣٠″

(٤) ق (∠ أ) = ٤٠° ٧′ ٢٩″ ، ق (∠ ب) = ٦٠° ١٤′ ٥١″

ق (∠ جـ) = ٧٩° ٣٨′ ٢٦″

(٥) اولاً : جـَ = ١٢ سم ، ق (∠ ب) = ٥٥° ٤٦′ ، ق (∠ جـ) = ٨٢° ١٣′ ٥٩″

ثانيا: جـَ = ٣ سم ، ق (∠ ب) = ١٢٤° ١٣′ ٤٣″ ، ق (∠ جـ) = ١٣° ٤٦′ ١٧″

(٦) محيط الشكل أ ب جـ د = ٢٤,٧ سم

(٧) ق (∠ أ د و) = ١٢٠°



تمارين على قانون (قاعدة) جيب التمام

اختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاه:

(١) فى المثلث ٲ ب جـ إذا كان : ٲ = ٥سم ، ب = ٧سم ، جـ = ٨سم فإن ق(∠ ب) = ...

(أ) ٧٠° (ب) ٨٠° (جـ) ٧٥° (د) ٦٠°

(٢) فى المثلث ٲ ب جـ إذا كان : ٲ = ٣ سم ، ب = ٥سم ، ق(∠ ب) = ١٢٠° فإن جـ = ... سم

(أ) ٥ (ب) ٩ (جـ) ١٠ (د) ٧

(٣) فى المثلث س ص ع يكون ص٢ + ع٢ − س٢ = ٢ص ع × ....

(أ) جتاس (ب) جاع (جـ) جتاع (د) جاس

(٤) فى أى مثلث ل م ن يكون المقدار $\frac{م^2 + ن^2 - ل^2}{٢ م ن}$ مساويا :..........

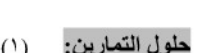
(أ) جتام (ب) جان (جـ) جتال (د) جام

أجب على الاسئلة الاتية:

(٥) مثلث أطوال أضلاعه ١٧، ١٣، ١٥ من السنتيمترات أوجد قياس أكبر زاوية فى المثلث.

(٦) ٲ ب جـ د متوازى أضلاع فيه ٲب = ٩سم ، ب جـ = ١٣سم ، ٲ جـ = ٢٠سم ، أوجد طول $\overline{ب د}$

(٧) ٲ ب جـ مثلث محيطه ٧٠سم ، ٲ = ٢٦سم ، ق(∠ ب) = ٦٠° ، أوجد مساحة سطحة



حلول التمارين: (١) د (٢) د (٣) أ (٤) جـ

(٥) ق (∠ ب) = ٤٧° ٤٢′ ٥٣″

(٦) ب د = ١٠سم

(٧) مساحة المثلث = ٢٢٨,٥سم^{٢}



الوحدة الرابعة – حساب مثلثات

تمارين عامة على الوحدة

اختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاه:

١) طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث ٢ ب جـ الذي فيه ق(∠ ٢) = ٣٠°، ٢/ = ١٠ سم يساوي .... سم

٢) ١٠ ب) ٢٠ جـ) ٥ د) ٤٠

٢) محيط الدائرة المارة برؤوس المثلث ٢ ب جـ الذي فيه ق(∠ ٢) = ٣٠°، ٢/ = ١٠ سم يساوي .... سم

٢) ١٠ π ب) ٢٠ π جـ) ١٠٠ π د) ٢٥ π

٣) مساحة الدائرة المارة برؤوس المثلث ٢ ب جـ الذي فيه ق(∠ ٢) = ٣٠°، ٢/ = ١٠ سم يساوي .... سم

٢) ١٠ π ب) ٢٠ π جـ) ١٠٠ π د) ٢٥ π

٤) طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث ٢ ب جـ الذي فيه ٢/ = جا ٢ يساوي ....سم

٢) $\frac{١}{٢}$ ب) $\frac{١}{٤}$ جـ) ١ د) ٢

٥) في المثلث ٢ ب جـ إذا كان $\frac{١}{٢}$ جا ٢ = $\frac{١}{٣}$ جا ب = $\frac{١}{٤}$ جا جـ ، فإن ٢/ : ب/ : جـ/ = ...

٢) ٢ : ٣ : ٤ ب) ٤ : ٢ : ٣ جـ) ٦ : ٤ : ٣ د) ٣ : ٤ : ٦



٦) في المثلث ﻡ ب ﺟ إذا كان ق(∠ ﺃ) = ٣٠°، ق(∠ ب) = ٦٠°، فإن ﻡ/ : ب/ : ﺟ/ = ...

ﻡ) ١ : ٢ : ٣ ب) ١ : $\sqrt{٣}$: ٢ ﺟ) ٣ : ٢ : ١ د) ٢ : $\sqrt{٣}$: ١

٧) في المثلث ﻡ ب ﺟ إذا كان ق(∠ ﺃ) = ٣٠°، وطول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث ﻡ ب ﺟ يساوي ٤ سم فإن ﻡ/ = ...سم

ﻡ) ٢ ب) ٤ $\sqrt{٣}$ ﺟ) ٤ د) ١٦

٨) في المثلث ﻡ ب ﺟ إذا كان ق(∠ ﺃ) = ٨٠°، ق(∠ ب) = ٦٠°، ﺟ/ = ١٠ سم فإن :
ﻡ/ = ... لأقرب سم

ﻡ) ١٤ ب) ١٥ ﺟ) ١٦ د) ١٣

٩) في المثلث ﻡ ب ﺟ إذا كان ق(∠ ﺃ) = ٣٥°، ﻡ/ = ٨سم ، ب/ = ٦ سم فإن ق(∠ ب) = ... ° تقريبا

ﻡ) ٢٥ ب) ٣٥ ﺟ) ١٥ د) ٤٥

١٠) عدد المثلثات التي يمكن تكوينها وفق الشروط التالية: ق(∠ ﺃ) = ٣٥°، ﻡ/ = ٧ سم ، ب/ = ٩سم يساوي.....

ﻡ) صفر ب) ١ ﺟ) ٢ د) ٣

١١) إذا كان ﻡ/ = ١٨ سم ، ب/ = ٢٤سم ، ﺟ/ = ٣٠ سم فإن جتا ﻡ = ...

ﻡ) $\frac{٣}{٥}$ ب) $\frac{١}{٤}$ ﺟ) $\frac{٤}{٥}$ د) $\frac{٣}{٤}$

١٢) في المثلث ٩ ب جـ إذا كان : ٩/ = $\sqrt{3}$ + ١ سم ، ب/ = ٢سم ، ق(∠ جـ) = ٦٠° فإن جـ/ =............. سم

٩) ٦ ب) ٢ جـ) $\sqrt{6}$ د) $\sqrt{2}$

١٣) في اي مثلث ٩ ب جـ يكون جـ/ (٩/جتا ب - ب/جتا ٩) = ...

٩) ب/² - جـ/² ب) جـ/² - ب/² جـ) ٩/² - ب/² د) صفر

١٤) في المثلث ٩ ب جـ إذا كان (٩/+ ب/ + جـ/) (٩/+ ب/ - جـ/) = ٩/ب/ فإن جتا جـ =.............

٩) $\frac{1}{2}$ ب) - $\frac{1}{2}$ جـ) صفر د) ١

١٥) في المثلث ٩ب جـ إذا كان ب/ = ٨ سم ، جـ/ = ٦ سم ، ق(∠ ٩) = ٦٠° فإن ٩/ =......سم

٩) ١٢ ب) ١٣ جـ) $\sqrt{26}$ د) $\sqrt{52}$

حلول التمارين العامة على الوحدة الرابعة

١) ٩	٢) ب	٣) جـ	٤) ٩	٥) ٩
٦) ب	٧) جـ	٨) ب	٩) ٩	١٠) جـ
١١) جـ	١٢) جـ	١٣) جـ	١٤) ب	١٥) د



الوحدة الرابعة – حساب مثلثات

الاختبار الاول على الوحدة الرابعة

اختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاه:

١) إذا كان مساحة سطح الدائرة المارة برؤوس المثلث أ ب جـ تساوي ١٠٠ π سم٢ ، وكان ق(∠ أ) = ٣٠° فإن أ/ = ...سم

أ) ١٠ ب) ٨ جـ) ٦ د) ٤

٢) طول أصغر ضلع في المثلث أ ب جـ الذي فيه كان ق(∠ أ) =٤٣° ، ق(∠ ب) =٦٥° ، جـ/ =٨,٦ سم يساوى.....سم تقريبا

أ) ٦,٢ ب) ٥,٨ جـ) ٧,١ د) ٤,٤

٣) في المثلث أ ب جـ إذا كان ق(∠ أ) =١٣٣° ، أ/ = ١٤سم ، جـ/ =٧سم فإن مساحة سطح المثلث =.... سم ٢ لأقرب عدد صحيح

أ) ١٩ ب) ٢٠ جـ) ٢١ د) ٢٢

٤) في المثلث أ ب جـ إذا كان أ/ = ٤ سم ، ب/ =٣ سم ، ق(∠ أ) =٦٠° فإن ......

أ) جـ/٢ + ٣ جـ/ + ٧ =٠ ب) جـ/٢ – ٣ جـ/ – ٧ =٠

جـ) جـ/٢ + ٣ جـ/ – ٧ =٠ د) جـ/٢ – ٣ جـ/ + ٧ =٠

٥) في المثلث أ ب جـ إذا كان (أ/ + ب/ + جـ/) (ب/ + جـ/ – أ/) = ٢ ب/ جـ/ فإن ......

أ) المثلث متساوي الاضلاع ب) المثلث متساوي الساقين

جـ) المثلث قائم الزاوية د) المثلث منفرج الزاوية



حلول الاختبار الاول على الوحدة الرابعة

١) أ　　٢) أ　　٣) جـ　　٤) ب　　٥) جـ



الاختبار الثاني على الوحدة الرابعة

اختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاه:

١) عدد حالات المثلثات التي تحقق الشروط التالية : ق(∠ أ) =٤٧°، أ/ = ٤ سم ، ب/ =٦ سم هي.......

أ) صفر ب) ١ ج) ٢ د) عدد لانهائي

٢) في المثلث أب جـ إذا كان $حا^2 أ + حا^2 ب = حا^2 جـ$ فإن المثلث يكون ....

أ) متساوي الاضلاع ب) متساوي الساقين

ج) قائم الزاوية د) منفرج الزاوية

٣) إذا كانت النسبة بين قياسات زوايا المثلث أب جـ كنسبة ١ : ٢ : ٣ فإن النسبة بين أطوال اضلاعه هي ....

أ) ١ : ٢ : ٣ ب) ٣ : ٢ : ١ ج) ١ : $\sqrt{3}$: ٢ د) ٢ : $\sqrt{3}$: ١

٤) في المثلث أب جـ إذا كان أ/ = ٣٦ سم ، ب/ =٢٥ سم ، ق(∠ جـ) =٨٦° فإن جـ/ =.....سم تقريبا

أ) ٢٤ ب) ٤٢ ج) ٣٨ د) ٣٠

٥) مثلث أطوال اضلاعه ٤ سم ، ٥ سم ، ٧ سم فإن قياس أكبر زواياه = ...تقريبا

أ) ٤٥ ب) ١٦ ج) ١٠٢ د) ١٥٢



حلول الاختبار الثاني على الوحدة الرابعة

١) أ ٢) جـ ٣) جـ ٤) ب ٥) جـ